

Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος.....	xiii
Ευχαριστίες.....	xvii
Κεφάλαιο 1	1
Εισαγωγή.....	1
1.1 Ιστορική αναδρομή.....	1
1.2 Τι είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα	7
1.3 Βασικά στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας	9
Κεφάλαιο 2	15
Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων Γραμμικού	
Προγραμματισμού	15
2.1 Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας	15
2.2 Μαθηματική Μοντελοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (Model Building).....	16
2.3 Άλυτες ασκήσεις.....	38
Κεφάλαιο 3	57
Μαθηματικό υπόβαθρο για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού	
Προγραμματισμού	57
3.1 Προβλήματα βελτιστοποίησης και πολυπλοκότητα αλγορίθμων	57
3.2 Το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού.....	62
3.3 Προϋποθέσεις του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού	63
3.4 Βασικές μαθηματικές έννοιες	65
3.5 Άλυτες ασκήσεις.....	78
Κεφάλαιο 4	79
Γραφική επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού	79
4.1 Εισαγωγή	79

4.2 Γραφική επίλυση (Graphical solution).....	80
4.3 Ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών	88
4.4 Άλυτες ασκήσεις.....	108
Κεφάλαιο 5	113
Η μέθοδος Simplex	113
5.1 Εισαγωγή	113
5.2 Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.	115
5.3 Βάση του συστήματος των περιορισμών	118
5.4 Βασικά θεωρήματα	121
5.5 Σύγκριση της μεθόδου Simplex με τη μέθοδο της γραφικής επίλυσης.....	124
5.6 Χρήσιμοι συμβολισμοί και ορισμοί.....	128
5.7 Βελτίωση μίας βασικής εφικτής λύσης.....	133
5.8 Μη πεπερασμένη (μη φραγμένη) λύση.....	142
5.9 Κριτήρια τερματισμού της διαδικασίας αλλαγής βάσης.....	146
5.10 Εκφυλισμένες λύσεις.....	146
5.11 Ανακεφαλαίωση	147
5.12 Κριτήριο εισαγωγής νέου διανύσματος στη βάση	148
5.13 Ο αλγόριθμος Simplex.....	152
5.14 Υπολογιστικές πλευρές της μεθόδου Simplex	157
5.15 Ο πίνακας Simplex (Simplex tableau)	161
5.16 Προσδιορισμός μίας αρχικής βασικής εφικτής λύσης	171
5.17 Ειδικές περιπτώσεις στην εφαρμογή της μεθόδου Simplex	190
5.18 Άλυτες ασκήσεις.....	206
Κεφάλαιο 6	211
Επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τη βοήθεια	
υπολογιστικών πακέτων.....	211
6.1 Εισαγωγή	211
6.2 Solver.....	212
6.3 LINDO.....	224
6.4 LibreOffice	229
6.5 Άλυτες ασκήσεις.....	233
Κεφάλαιο 7	237
Το δυϊκό πρόβλημα.....	237
7.1 Εισαγωγή	237

7.2 Ορισμός του δυϊκού προβλήματος.....	238
7.3 Σχέσεις μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού	244
7.4 Επιπτώσεις της δυϊκότητας στο οικονομικό περιβάλλον	257
7.5 Άλυτες ασκήσεις.....	275
Κεφάλαιο 8	281
Ακέραιος Προγραμματισμός.....	281
8.1 Εισαγωγή	281
8.2 Μοντελοποίηση προβλήματος Ακέραιου Προγραμματισμού.....	282
8.3 Τυπικά προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού.....	288
8.4 Ο αλγόριθμος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης (Branch and Bound algorithm, B&B algorithm).....	304
8.5 Ο αλγόριθμος των επιπέδων αποκοπής (Cutting Planes algorithm).....	325
8.6 Άλυτες ασκήσεις.....	342
Κεφάλαιο 9	347
Το πρόβλημα της μεταφοράς.....	347
9.1 Εισαγωγή	347
9.2 Ορισμός του προβλήματος της μεταφοράς.....	348
9.3 Ο αλγόριθμος του προβλήματος της μεταφοράς.....	351
9.4 Μη ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς	367
9.5 Εκφυλισμένες λύσεις	376
9.6 Άλυτες ασκήσεις.....	382
Κεφάλαιο 10	387
Έλεγχος αποφάσεων υπό αβεβαιότητα - Δένδρα αποφάσεων	387
10.1 Εισαγωγή	387
10.2 Αξία υπό συνθήκη (Conditional Value - CV).....	388
10.3 Αναμενόμενη χρηματική αξία (Expected Monetary Value - EMV)	390
10.4 Κόστος Ευκαιρίας υπό συνθήκη (Conditional Opportunity Loss).....	392
10.5 Κέρδος κάτω από τέλεια πρόβλεψη.....	396
10.6 Υπολογισμός της χρηματικής αξίας της τέλει πληροφόρησης	397
10.7 Ανάλυση ευαισθησίας (Sensitivity Analysis)	400
10.8 Δένδρα αποφάσεων (Decision trees)	405
10.9 Ανάλυση περίπτωσης (Case Study) – Βιομηχανία κατασκευής αυτοκινήτων	408
10.10 Άλυτες ασκήσεις.....	421

Κεφάλαιο 11 433

Έλεγχος αποθεμάτων.....	433
11.1 Εισαγωγή	433
11.2 Παράγοντες πίεσης για χαμηλά/υψηλά επίπεδα αποθέματος.....	434
11.3 Μορφές αποθέματος.....	436
11.4 Μέθοδοι μείωσης αποθεμάτων.....	436
11.5 Χαρακτηριστικά ενός συστήματος αποθεμάτων.....	438
11.6 Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (EOQ)	439
11.7 Έλεγχος αποθεμάτων με σταθερή ζήτηση	440
11.8 Έλεγχος αποθεμάτων με αβέβαιη ζήτηση.....	477
11.9 Αποθέματα ασφαλείας.....	500
11.10 ABC ανάλυση (ABC analysis)	503
11.11 Άλυτες ασκήσεις.....	510

Κεφάλαιο 12 519

Θεωρία ουρών αναμονής.....	519
12.1 Εισαγωγή	519
12.2 Η απαρχή της Θεωρίας Ουρών Αναμονής (Queuing Theory)	521
12.3 Διάρθρωση του συστήματος.....	523
12.4 Ορολογία	528
12.5 Συμβολισμός Kendall (Kendall's notation)	533
12.6 Το θεώρημα του Little (Little's theorem)	536
12.7 Ιδιότητα PASTA.....	540
12.8 Συστήματα ουρών αναμονής γεννήσεων-θανάτων σε ισορροπία (Birth and death process).....	541
12.9 Συστήματα ουρών αναμονής με έναν εξυπηρετητή.....	547
12.10 Συστήματα Ουρών Αναμονής με πολλαπλούς εξυπηρετητές (Multiple Servers - channels).....	561
12.11 Παραδείγματα ουρών αναμονής	572
12.12 Άλυτες ασκήσεις.....	589

Κεφάλαιο 13 595

Διαχείριση Έργου (Project Management).....	595
13.1 Εισαγωγή	596
13.2 Έργο (Project).....	606
13.3 Μέθοδοι Διαχείρισης Έργου.....	616

13.4 Μέθοδοι δικτυωτής ανάλυσης	633
13.5 Τα σύγχρονα πρότυπα του Project Management	719
13.6 Άλυτες ασκήσεις.....	732
Κεφάλαιο 14	745
Θεωρία Παιγνίων (Game Theory)	745
14.1 Εισαγωγή	746
14.2 Ορολογία	750
14.3 Το δίλημμα του φυλακισμένου (Prisoner's dilemma).....	753
14.4 Αμιγής Στρατηγική (Pure strategy).....	755
14.5 Κυρίαρχη ή επικρατέστερη στρατηγική (Dominating strategy).....	761
14.6 Παίγνια δύο παικτών σταθερού αθροίσματος.....	765
14.7 Μικτή στρατηγική (Mixed strategy)	768
14.8 Εύρεση μικτής στρατηγικής.....	774
14.9 Επίλυση παιγνίου ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού	777
14.10 Γραφική μέθοδος επίλυσης παιγνίου	781
14.11 Άλυτες ασκήσεις.....	787
Κεφάλαιο 15	795
Μοντέλα Δικτύων (Network models).....	795
15.1 Εισαγωγή	796
15.2 Ορολογία και συμβολισμοί.....	798
15.3 Οι 7 γέφυρες του Königsberg (Seven Bridges of Königsberg)	804
15.4 Το πρόβλημα της Ελάχιστης Διαδρομής (Shortest Path problem)	806
15.5 Επίλυση του προβλήματος της ελάχιστης διαδρομής με τη χρήση Solver.....	817
15.6 Το πρόβλημα της μέγιστης ροής (Max Flow problem).....	820
15.7 Το πρόβλημα του ελάχιστου κόστους ενός δικτύου ροής (Minimum Cost Flow problem)	826
15.8 Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου (Minimum Spanning Tree problem)	835
15.9 Μελέτη Περίπτωσης - Πανεπιστημιούπολη.....	838
15.10 Άλυτες ασκήσεις.....	854
Κεφάλαιο 16	859
Λυμένες ασκήσεις	859
Παράρτημα.....	917

Βιβλιογραφία.....	919
Ξένη βιβλιογραφία.....	919
Ελληνική βιβλιογραφία	930
Ευρετήρια.....	932
Ευρετήριο Ελληνικών όρων	932
Ευρετήριο Αγγλικών όρων	937

Πρόλογος

Η Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational Research) είναι ο κλάδος της επιστήμης (σύνθετος τομέας ειδικοτήτων) με αντικείμενο την εύρεση λύσεων για τη λήψη αποφάσεων. Οι λύσεις αυτές είναι κατά κανόνα “βέλτιστες” ως προς τα δεδομένα του προβλήματος. Απλά παραδείγματα Ε.Ε., είναι η βέλτιστη κατανομή πόρων και οι βέλτιστες μεταφορές. Π.χ. επιλογή τροφών για σίτιση στρατού με ελάχιστο κόστος. Επίσης, η ελάχιστη διαδρομή μεταφοράς καυσίμων από το διωλιστήριο σε πρατήρια βενζίνης. Μια πολύ πιο δύσκολη εφαρμογή είναι ο προγραμματισμός (scheduling) σε πραγματικό χρόνο, σε πύργο ελέγχου πολυσύχναστου αεροδρομίου, με στόχο την ασφάλεια και ελαχιστοποίηση του μέσου χρόνου αναμονής αεροσκαφών.

Το βέλτιστο της λύσης ορίζεται ως προς κάποια μετρήσιμα κριτήρια, π.χ. ελάχιστο κόστος, μέγιστη ευστάθεια, ελάχιστος χρόνος αναμονής ή διεκπεραίωσης, μέγιστο όριο αντοχής, ελαχιστοποίηση κάποιας νόρμας, συνδυασμός κέρδους με ρίσκο, κ.τ.λ. Συχνά στις εφαρμογές, τα δεδομένα του προβλήματος είναι ελλιπή και οι “βέλτιστες” αποφάσεις λαμβάνονται υπό συνθήκη αβεβαιότητας. Για τις περιπτώσεις αυτές, χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, με τους αντίστοιχους δείκτες αξιοπιστίας.

Η χαρακτηριστική διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος της Ε.Ε. είναι:

- α)** η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος,
- β)** η αξιοποίηση της δομής του μαθηματικού μοντέλου για επινόηση κατάλληλων αλγορίθμων βελτιστοποίησης,
- γ)** η αριθμητική λύση με τη χρήση υπολογιστή.

Τα προβλήματα που τίθενται, καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων, με αποτέλεσμα η μοντελοποίηση ή προσομοίωση να αξιοποιεί διαφορετικούς

επιστημονικούς κλάδους ή συνδυασμούς αυτών. Μία μερική εποπτεία αυτών των κλάδων που χρησιμοποιούνται ως “εργαλεία” της Ε.Ε. είναι: Στατιστική, Βελτιστοποίηση, Βέλτιστος Έλεγχος, Θεωρία Παιγνίων, Νευρωνικά Δίκτυα, Ρομποτική, Επιστήμη των Υπολογιστών, Μηχανική όλων των ειδικοτήτων, Management, Έλεγχος Αποθεμάτων (Inventory Control), ακόμα και στοιχεία Ψυχολογίας και Κοινωνιολογίας.

Ιστορικά, πολύ ενδιαφέρουσα είναι η ραγδαία εξέλιξη του κλάδου της Ε.Ε., ιδιαίτερα από τα πρώτα χρόνια του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου μέχρι σήμερα. Αυτή η εξέλιξη θα μπορούσε ίσως να συγκριθεί με την εκθετική ανάπτυξη των υπολογιστών! Από την αρχή του πολέμου, οι Άγγλοι, οι Σοβιετικοί και οι Αμερικάνοι, επινόησαν μαθηματικούς τρόπους για “βέλτιστες αποφάσεις” σχετικά με πρόβλεψη κινήσεων εχθρικών υποβρυχίων, διαχείριση πληροφοριών από ραντάρ, βέλτιστης κατανομής πόρων κ.α. Από τις τότε στρατιωτικές επιχειρήσεις καθιερώθηκε ο όρος Ε.Ε. Ο πλούτος των εφαρμογών υπήρξε μεγάλος. Μόνο για το λεγόμενο Γραμμικό Προγραμματισμό έχουν γραφτεί χιλιάδες βιβλία θεωρίας και εφαρμογών. Σημειωτέον ότι ο Γ.Π. έχει μία εύκολη απόδειξη λίγων γραμμών. Σύντομα μετά τον πόλεμο, ο κλάδος αξιοποιήθηκε από εταιρίες, βιομηχανίες, εργοστάσια, κατασκευές, κυβερνήσεις και επιχειρήσεις όλων των ειδών. Το πρόβλημα είναι γενικό και πρακτικό: Πώς αποφασίζω; Έχουν δοθεί βραβεία Nobel και έχουν δημιουργηθεί ολόκληρα τμήματα Ε.Ε. σε διάσημα Πανεπιστήμια και Πολυτεχνεία.

Στο βιβλίο “Εισαγωγή στην Ε.Ε.” θα αρκεστούμε να παρουσιάσουμε σε βάθος την ακόλουθη επιλογή χαρακτηριστικών προβλημάτων του κλάδου, με τις λύσεις τους και πολλά παραδείγματα: Γραφική επίλυση απλών προβλημάτων Γ.Π., η μέθοδος Simplex και το δυϊκό πρόβλημα, επίλυση προβλημάτων Γ.Π. μέσω υπολογιστικών πακέτων, Ακέραιος Προγραμματισμός, το πρόβλημα της μεταφοράς, έλεγχος αποθεμάτων, δένδρα αποφάσεων και ουρές αναμονής.

Στο βιβλίο έχουν παρουσιαστεί με μαθηματική αυστηρότητα αποδείξεις θεωρημάτων που αποτελούν τον κορμό ορισμένων κεφαλαίων, αλλά

συγχρόνως έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην παρουσίαση εφαρμογών και υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων. Σε κάθε κεφάλαιο έχει γίνει προσπάθεια, ώστε ο αναγνώστης να ενημερωθεί σε βάθος για τη θεωρία και τις διάφορες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να εφοδιαστεί με τόσα πολλά λυμένα παραδείγματα, ώστε να αποκτήσει μια ευχέρεια/δυναμική για την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου μεταξύ των άλυτων ασκήσεων παρατίθενται παλαιά θέματα διαφόρων πανεπιστημιακών σχολών. Τέλος, αντιπροσωπευτικές άλυτες ασκήσεις επιλύονται αναλυτικά σε ξεχωριστό παράρτημα, στο τέλος του βιβλίου.

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα δεκαετούς διδασκαλίας στο Ε.Μ.Π. Απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές των ΑΕΙ και ΤΕΙ της χώρας, αλλά σε εξέλιξη βρίσκεται και μία διεθνής έκδοσή του στα Αγγλικά. Επί πλέον, τονίζουμε εδώ ότι η Εισαγωγή στην Ε.Ε. είναι και ένα χρήσιμο και εύχρηστο βοήθημα αναφοράς για στελέχη επιχειρήσεων και οργανισμών, που επιθυμούν να ανανεώσουν και να εμπλουτίσουν τις γνώσεις τους σε θέματα της επαγγελματικής τους ενασχόλησης. Από παιδαγωγικής απόψεως, εκτός της προφανούς χρησιμότητας του βιβλίου αυτού, πιστεύουμε ότι δρα και αναδρομικά ως εμπέδωση κάποιων θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων, που στο παρελθόν ίσως φαίνονταν άνευ αντικειμένου.

Ιδιαίτερη προσπάθεια έχει γίνει να τονιστεί η σχέση μεταξύ του μαθηματικού formalισμού και της φυσικής διαίσθησης, μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας, να φανεί καθαρά στο φοιτητή και τον επαγγελματία η συμπληρωματικότητα μεταξύ θεωρίας και εφαρμογών, ως και ο βασικός ρόλος που παίζει ο υπολογιστής.

Το βιβλίο αυτό είναι αυτοδύναμο, με την έννοια ότι δε χρειάζεται αναφορά σε άλλα βοηθητικά βιβλία. Επίσης, τα προαπαιτούμενα είναι δύο χρόνια βασικών μαθηματικών Ελληνικού ΑΕΙ ή ΤΕΙ. Τα περισσότερα κεφάλαια και μέρη κεφαλαίων είναι σχετικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Αυτό, εκτός από την ευελιξία που παρέχει για διάφορα προγράμματα διδασκαλίας, έχει και προφανή παιδαγωγική σκοπιμότητα.

Πρόλογος 2^{ης} έκδοσης

Στην 2^η έκδοση προστέθηκε το κεφάλαιο «Διαχείριση Έργου» (Project Management), όπου παρουσιάζονται κυρίως οι μέθοδοι CPM, MPM και PERT και ανανεώθηκαν οι ασκήσεις του βιβλίου.

Πρόλογος 3^{ης} έκδοσης

Τους συναδέλφους καθηγητές και τους φίλους φοιτητές που υποστήριξαν από την πρώτη στιγμή το βιβλίο μας, θερμά ευχαριστούμε. Η ταχύτατη εξάντληση των προηγούμενων εκδόσεων μας έδωσε τη δυνατότητα να επανέλθουμε με την παρούσα 3^η έκδοση, στην οποία:

1. Έχει προστεθεί το κεφάλαιο «Θεωρία Παιγνίων» (Game Theory).
2. Έχει προστεθεί το κεφάλαιο «Μοντέλα Δικτύων» (Network Models), όπου παρουσιάζονται κυρίως τα προβλήματα της Ελάχιστης Διαδρομής (Shortest Path), της Μέγιστης Ροής (Maximum Flow), του Ελάχιστου Κόστους (Minimum Cost Flow) και του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου (Minimum Spanning Tree).
3. Έχουν ενσωματωθεί τα παροράματα των δύο πρώτων εκδόσεων.
4. Έχουν εμπλουτιστεί οι άλυτες και λυμένες ασκήσεις του βιβλίου.

Οι συγγραφείς.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορική αναδρομή

Από την εμφάνιση της βιομηχανικής επανάστασης (19^{ος} αιώνας) μέχρι σήμερα παρατηρείται μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη στο μέγεθος και την πολυπλοκότητα των επιχειρήσεων και των οργανισμών. Οι μικρές επιχειρήσεις βαθμιαία εξελίχθηκαν σε εταιρίες συγκέντρωσης μεγάλων κεφαλαίων. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο των επαναστατικών αλλαγών αυξήθηκε εντυπωσιακά ο καταμερισμός των ευθυνών και η κατανομή της εργασίας μέσα στις επιχειρήσεις. Όμως, η αύξηση της εξειδίκευσης δημιούργησε καινούρια προβλήματα, τα οποία απασχολούν τις επιχειρήσεις και τους οργανισμούς μέχρι σήμερα. Για παράδειγμα, οι εξειδικευμένοι εργάτες, υπάλληλοι και επιστήμονες είχαν βαθιά γνώση του αντικειμένου με το οποίο ασχολούνταν, αλλά ελάχιστη γνώση της εργασίας των άλλων ειδικοτήτων και του τρόπου με τον οποίο οι δραστηριότητες και οι στόχοι τους συνδέονταν με τον κύριο οργανισμό. Επίσης οι στόχοι και οι επιδιώξεις τους πολλές φορές έρχονταν σε αντίθεση με τους στόχους και τις επιδιώξεις των άλλων ειδικοτήτων. Τέλος, η κατανομή των διαθέσιμων πόρων στις διάφορες δραστηριότητες έγινε αρκετά δύσκολη. Δημιουργήθηκε λοιπόν η ανάγκη μιας επιστήμης η οποία όχι μόνο να έχει ως αντικείμενο την εύρεση του καλύτερου δυνατού τρόπου επίλυσης αυτών και

άλλων παρόμοιων προβλημάτων, αλλά ταυτόχρονα να ικανοποιεί την προσπάθεια μας να προσεγγίσουμε επιστημονικά την διοίκηση των οργανισμών. Παρουσιάστηκε δηλαδή η ανάγκη δημιουργίας της επιστήμης της **Επιχειρησιακής Έρευνας**.

Το **1940** θεωρείται ως έτος γέννησης του νέου επιστημονικού κλάδου, όμως οι ρίζες της νέας αυτής επιστήμης της Ε.Ε. μπορούν να αναζητηθούν πολύ πριν. Το πρώτο βήμα στον τομέα είχε γίνει από τον Charles Babbage (1791-1871). Χαρακτηρίστηκε ως ο “πατέρας της επιχειρησιακής έρευνας”, επειδή η έρευνά του για το κόστος μεταφοράς και το κόστος για την ταξινόμηση της αλληλογραφίας οδήγησε στη δημιουργία του γενικού αγγλικού “Ταχυδρομείου της πένας” το 1840. Το 1917 ο Agner Krarup Erlang (1878-1929) μελετούσε προβλήματα σχετικά με το χρόνο απασχόλησης των τηλεφωνικών κέντρων, και το 1920 ο Horace Levinson ασχολήθηκε με τη μελέτη προβλημάτων πωλήσεων και εμπορίου. Γιατί όμως αυτή η χρονολογία (1940) θεωρείται ως επίσημη αρχή του κλάδου; Τι συνέβη εκείνη την εποχή που προκάλεσε τη γέννηση της επιχειρησιακής έρευνας; Η έκρηξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, το Σεπτέμβριο του 1939, συντάρραξε την ανθρωπότητα. Για την τελική έκβαση του πολέμου επιστρατεύθηκαν όλες οι διαθέσιμες δυνάμεις της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων και επιστημόνων, όπως μαθηματικών, φυσικών, στατιστικών, βιολόγων, ψυχιάτρων κ.α. Έτσι λοιπόν, στο Ηνωμένο Βασίλειο επιστήμονες όπως οι Patrick Blackett ¹ (1897-1974), Jonathan Vivian Rosenhead² (1938-), Conrad Hal Waddington (1905-1975), Owen Wansbrough-Jones (1906-1983) και Frank Yates (1902-1994), αλλά και στις Ηνωμένες Πολιτείες ο George Dantzig (1914-2005) έψαχναν τρόπους ώστε να λαμβάνουν καλύτερες αποφάσεις σε περιοχές όπως τα προγράμματα διοικητικής μέριμνας και τα προγράμματα εκπαίδευσης.

¹ Patrick Maynard Stuart Blackett, Nobel prize στη Φυσική το 1948, ενώ προς τιμήν του ονομάστηκε ένας κρατήρας “crater Blackett” στην επιφάνεια της Σελήνης.

² 1986-87, President of the Operational Research Society.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

2.1 Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας

Συνοπτικά, θα μπορούσαμε να πούμε πως η επιχειρησιακή έρευνα ασχολείται με την άριστη λήψη αποφάσεων σε προσδιοριστικά και πιθανολογικά συστήματα που προκύπτουν μέσα από πραγματικά προβλήματα. Διακρίνοντας τα προβλήματα αυτά ως προς το περιεχόμενο τους παραθέτουμε μερικά παραδείγματα.

Βιομηχανία-Παραγωγή

Χωροθέτηση εργοστασίου, προγραμματισμός προμηθειών ή παραγωγής, έλεγχος αποθεμάτων πρώτων υλών ή προϊόντων, έλεγχος ποιότητας, ανανέωση μηχανολογικού εξοπλισμού, ανάλυση αξιοπιστίας, εξισορρόπηση γραμμής παραγωγής.

Εμπόριο

Καθορισμός βέλτιστης σύνθεσης παραγωγής, βέλτιστη στρατηγική διαφημίσεως και τιμολογήσεως προϊόντων, προγραμματισμός πωλήσεων, προγραμματισμός μεταφοράς και διανομής προϊόντων, προσδιορισμός θέσεως και αριθμού αποθηκών, σύνθεση μεταφορικού στόλου.

Οικονομικά

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός, καθορισμός πιστωτικής πολιτικής, προϋπολογισμός, βελτιστοποίηση χρηματοροών.

Προσωπικό

Ανάλυση & αξιολόγηση προσωπικού, προγραμματισμός προσωπικού, ανάλυση αιτιών απουσίας, πρόληψη ατυχημάτων.

Προβλήματα σαν κι αυτά όμως απασχολούν τους περισσότερους οργανισμούς, μεταξύ των οποίων τις εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις. Συνεπώς, τόσο οι μεγάλες εταιρείες όσο και πολλοί από τους μικρούς βιομηχανικούς οργανισμούς διαθέτουν στο μόνιμο προσωπικό τους ομάδες επιχειρησιακής έρευνας. Πολλές βιομηχανίες, όπως βιομηχανίες κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, μέσων επικοινωνίας, ηλεκτρονικών υπολογιστών, τροφίμων, μεταλλουργίας, μεταλλευμάτων, χαρτιού, πετρελαίου και μέσω μεταφοράς χρησιμοποίησαν και χρησιμοποιούν ευρέως την επιχειρησιακή έρευνα. Επίσης οι κυβερνητικές υπηρεσίες, χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί και νοσοκομεία τη χρησιμοποιούν όλο και περισσότερο.

2.2 Μαθηματική Μοντελοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (Model Building)

Ο τρόπος, με τον οποίο επιτυγχάνεται η μαθηματική περιγραφή ενός συστήματος του οποίου επιδιώκεται η βελτιστοποίηση, γίνεται ευκολότερα κατανοητός με τη βοήθεια μερικών αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων. Για περισσότερα παραδείγματα διαμόρφωσης μοντέλων γραμμικού προγραμ-

ματισμού συνιστούμε ειδικότερα τα βιβλία των Bradley, Hax και Magnanti¹ (1977), Bazaraa, Jarvis και Sherali² (2005), και Hiller και Lieberman³ (2005), τα οποία χαρακτηρίζονται για τις πλούσιες συλλογές τους από ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές. Πιο κοντά στην επεξεργασία των μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού από τη σκοπιά του management βρίσκονται τα βιβλία των Eppen, Gould, Schmidt, Moore και Weatherford⁴ (1998), του Winston⁵ (2003) και τέλος το βιβλίο των Anderson, Sweeny και Williams⁶ (2012).

Παράδειγμα 2.1: Προγραμματισμός παραγωγής (Production Management)

Ας θεωρήσουμε μία βιομηχανική μονάδα, η οποία για την παραγωγή τεσσάρων προϊόντων Π_1 , Π_2 , Π_3 και Π_4 διαθέτει τρεις μηχανές M_1 , M_2 , και M_3 . Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται ο χρόνος σε min που απαιτείται για την επεξεργασία μίας μονάδας από το κάθε προϊόν σε κάθε μηχανή, ο διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος (σε χρηματικές μονάδες).

	Χρόνος επεξεργασίας κάθε προϊόντος στις διάφορες μηχανές				Διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής (min)
	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3	Προϊόν 4	
Μηχανή 1	4	2	3	1	480
Μηχανή 2	2	3	1	3	360
Μηχανή 3	3	0	1	0	240
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	6	5	3	4	

Πίνακας 2.1: Χρόνοι επεξεργασίας και κέρδη ανά προϊόν

¹ Bradley, S.P., Hax, A.C., Magnanti, T.L. (1977). *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley Pub. Co..

² Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., Sherali, H.D. (2005). *Linear Programming and Network Flows*, Wiley Interscience.

³ Hiller, F.S., Lieberman, G.J. (2005). *Introduction to Operation Research*, Mc Grow-Hill, Higher Education.

⁴ Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., Moore, J.H., Weatherford, L.R. (1998) *Introductory Management Science, Decision Modelling with spreadsheets*, Prentice-Hall.

⁵ Winston, W.L. (2003). *Operations Research Applications and Algorithms*, Duxbury Press.

⁶ Anderson, D.R., Sweeny, D.J., Williams, T.A. (2012) *Quantitative Approaches to Decision Making*, South-Western Cengage Learning.

Τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα 2.1 υποδηλώνουν ότι τα προϊόντα Π_2 και Π_4 δεν υφίστανται επεξεργασία στη μηχανή M_3 .

Ας υποθέσουμε πως όλες οι παραγόμενες μονάδες απορροφούνται από την αγορά. Είναι λογικό η επιχείρηση να θέλει να αξιοποιήσει το διαθέσιμο χρόνο των μηχανών κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ρυθμίζοντας την ημερήσια παραγωγή κάθε προϊόντος σε τέτοιο ύψος, ώστε η απόδοση του συστήματος, όπως εκφράζεται από το συνολικό κέρδος που αποφέρει η πώληση των προϊόντων αυτών, να μεγιστοποιείται.

Ο χρόνος επεξεργασίας των προϊόντων στις διάφορες μηχανές, ο διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος αποτελούν τις **σταθερές** ή **παραμέτρους** (parameters) του προβλήματος. Ο καθορισμός των παραμέτρων, ο οποίος γίνεται κατά το στάδιο ανάλυσης του συστήματος, αποτελεί μία κρίσιμη φάση της όλης διαδικασίας διαμόρφωσης ενός μαθηματικού μοντέλου. Είναι αυτονόητο ότι κατά την ανάλυση του συστήματος πρέπει να γίνει μία αξιολόγηση των παραμέτρων του, ώστε να εντοπιστούν όλες οι παράμετροι, οι οποίες πραγματικά επηρεάζουν το κριτήριο απόδοσης του συστήματος. Οι τιμές των παραμέτρων πρέπει επίσης να προσδιορίζονται με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, προκειμένου το μαθηματικό μοντέλο που τελικά θα διαμορφωθεί, να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν πιο πιστά στο πραγματικό σύστημα.

Η επόμενη φάση της μαθηματικής διατύπωσης του προβλήματος περιλαμβάνει τον καθορισμό των **μεταβλητών** του (variables). Στα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού οι μεταβλητές ποσοτικοποιούν τις αποφάσεις που πρόκειται να ληφθούν και για το λόγο αυτό ονομάζονται **μεταβλητές απόφασης** (decision variables). Είναι φανερό ότι ο προγραμματισμός της παραγωγής απαιτεί τη λήψη αποφάσεων σχετικά με τις ποσότητες x_1, x_2, x_3 και x_4 που θα παράγονται ημερησίως από τα προϊόντα Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4 αντίστοιχα. Οι άγνωστες αυτές ποσότητες αποτελούν τις

μεταβλητές του προβλήματος, των οποίων οι τιμές πρέπει να προσδιοριστούν με τέτοιο τρόπο, ώστε το κέρδος να μεγιστοποιείται.

Με τη βοήθεια των παραμέτρων και των μεταβλητών του προβλήματος μπορούμε τώρα να διαμορφώσουμε μία μαθηματική σχέση που να περιγράφει το κριτήριο απόδοσης του συστήματος. Ως **κριτήριο** ή **μέτρο απόδοσης** (performance criterion ή measure) του συστήματος έχει ορισθεί εδώ το **κέρδος** από τη διάθεση των προϊόντων και **στόχος** είναι η **μεγιστοποίηση** (maximize) του κριτηρίου αυτού. Δεδομένου ότι το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι γνωστό, το συνολικό κέρδος προκύπτει από το άθροισμα

$$z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

Η συνάρτηση αυτή, της οποίας αναζητείται το μέγιστο και η οποία περιγράφει το κριτήριο απόδοσης του συστήματος, αποτελεί την **αντικειμενική συνάρτηση** (objective function) του μοντέλου.

Είναι φανερό πως αυξανόμενης της παραγωγής, δηλαδή αυξανόμενων των x_1 , x_2 , x_3 και x_4 , αυξάνεται και το κέρδος. Ωστόσο, οι παραγόμενες ποσότητες δεν είναι δυνατόν να αυξηθούν απεριόριστα, δεδομένου ότι ο ημερήσιος χρόνος που διατίθεται σε κάθε μηχανή είναι περιορισμένος. Οι ημερήσιοι χρόνοι σε **min** απασχόλησης των μηχανών M_1 , M_2 και M_3 είναι αντίστοιχα $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$, $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4$ και $3x_1 + x_3$. Δεδομένου ότι ο ημερήσιος χρόνος απασχόλησης κάθε μηχανής πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του αντίστοιχου διαθέσιμου, θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες (περιορισμοί):

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 480 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 360 \\ 3x_1 + \quad \quad + x_3 + \quad \quad &\leq 240 \end{aligned}$$

Το γεγονός εξάλλου ότι οι μεταβλητές x_1 , x_2 , x_3 και x_4 παριστάνουν παραγόμενες ποσότητες σημαίνει ότι οι μεταβλητές αυτές δεν είναι δυνατό να παίρνουν αρνητικές τιμές. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$,

$x_4 \geq 0$. Οι **ανισότητες**, τις οποίες εισάγει στο πρόβλημα ο διαθέσιμος χρόνος των μηχανών και η **μη αρνητικότητα** των μεταβλητών απόφασης, εκφράζουν τους φυσικούς **περιορισμούς** (constraints) στους οποίους υπόκειται το εξεταζόμενο σύστημα. Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί αποτελούν το **μαθηματικό μοντέλο** του συστήματος. Επομένως, η μαθηματική μοντελοποίηση για το συγκεκριμένο πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής είναι:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{Maximize Profit} = \max z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \quad \text{Μεγιστοποίηση κέρδους}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 480 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 360 \\ 3x_1 + \quad \quad + x_3 \leq 240 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Περιορισμοί διαθεσιμότητας του} \\ \text{ημερήσιου χρόνου των μηχανών} \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad \text{Περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι απαιτείται η παραγωγή κατ'ελάχιστον 80 μονάδων προϊόντος Π_3 ημερησίως. Τότε ένας νέος περιορισμός της μορφής " \geq " πρέπει να εισαχθεί:

$$x_3 \geq 80$$

Παράδειγμα 2.2: Επιλογή επενδυτικού προγράμματος (Investment Programming)

Μία εταιρία προτίθεται να επενδύσει 100 εκατομμύρια € σε κοινές και σε προνομιούχες μετοχές εταιριών εισηγμένων στο χρηματιστήριο, καθώς και σε ομόλογα του δημοσίου. Η αναμενόμενη ετήσια απόδοση των τριών αυτών τύπων επένδυσης είναι κατά σειρά 15%, 10%, και 7%. Δεδομένου ότι οι επενδύσεις σε κοινές και σε προνομιούχες μετοχές κρίνονται υψηλού κινδύνου, η εταιρία έχει αποφασίσει να επενδύσει σε αυτό το είδος μετοχών όχι παραπάνω από το 25% του συνολικά επενδύμενου κεφαλαίου. Επιπλέον, το

Κεφάλαιο 3

Μαθηματικό υπόβαθρο για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

3.1 Προβλήματα βελτιστοποίησης και πολυπλοκότητα αλγορίθμων

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε παραδείγματα προβλημάτων τα οποία μοντελοποιούνται με τις μεθόδους της Επιχειρησιακής Έρευνας. Τα μαθηματικά μοντέλα σε αυτές τις περιπτώσεις περιέχουν:

1. Τις **μεταβλητές απόφασης** (decision variables), οι οποίες ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που πρέπει να υπολογίσουμε και θα αποτελέσουν τη λύση του προβλήματος μας.

Στα προβλήματα των επιχειρήσεων, τα οποία καλούνται να επιλύσουν οι επιστήμονες της επιχειρησιακής έρευνας, συχνά ο ορισμός των μεταβλητών απόφασης είναι ιδιαίτερα δύσκολος, ειδικά αν οι επιχειρήσεις διατυπώνουν το πρόβλημά τους με ασαφή και συγκεχυμένο

Κεφάλαιο 4

Γραφική επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

4.1 Εισαγωγή

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming - LP) εφαρμόζεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι “γραμμικές” συναρτήσεις. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε προβλήματα βιομηχανίας, μεταφορών, οικονομικών, συστημάτων υγείας, αγροτικής οικονομίας, κοινωνικών συμπεριφορών και επιστημών, στρατιωτικών εφαρμογών κ.τ.λ.

Υπάρχουν πολύ αποτελεσματικά προγράμματα για την επίλυση των LP προβλημάτων, τα οποία λόγω της ευκολίας επίλυσής τους αποτελούν τη ραχοκοκαλιά για το σύνολο των αλγορίθμων των προβλημάτων της επιχειρησιακής έρευνας. Για έναν σύμβουλο επιχείρησης ο οποίος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα της θεωρίας αποφάσεων, η μαθηματική επίλυση

Κεφάλαιο 5

Η μέθοδος Simplex

5.1 Εισαγωγή

Το βασικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού είναι να βελτιστοποιηθεί μία αντικειμενική συνάρτηση η οποία εξαρτάται από πολλές μεταβλητές που υπόκεινται σε ένα σύνολο περιορισμών¹. Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές σχέσεις. Το 1947, ο G. Dantzig² δουλεύοντας για το Πεντάγωνο των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής κατά τη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου, διατύπωσε το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και σχεδίασε τη μέθοδο Simplex για μία συστηματική επίλυση του προβλήματος, η οποία όμως στη χειρότερη περίπτωση χρειαζόταν εκθετικό χρόνο. Το 1979, ο Khachiyan³ ανακάλυψε τον πρώτο πολυωνυμικό αλγόριθμο για τον γραμμικό προγραμματισμό, την

¹ Παπαγεωργίου, Γ. (2004). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα - Γραμμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές*, Ε.Μ.Π, Αθήνα.

² Dantzig, G. B. (1951a). *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*. In *Activity Analysis of Production and Allocation*, Koopmans, T. C., Ed. Wiley, New York, Chapter XXI, pp. 339-347.

³ Khachiyan, L and Fredman, M. L. (1996). On the Complexity of Dualization of Monotone, Disjunctive Normal Forms, *Journal of Algorithms*, 21, 618-628.

5.13 Ο αλγόριθμος Simplex

Όλα τα προηγούμενα συνοψίζονται στον παρακάτω αλγόριθμο βελτιστοποίησης, ο οποίος καλείται **πρωταρχικός αλγόριθμος Simplex (primary Simplex algorithm¹)**. Για την περίπτωση ενός **προβλήματος μεγιστοποίησης**:

Βήμα 1: Υπολογίστε μία αρχική βασική λύση \mathbf{x}_B επιλέγοντας τη βάση \mathbf{B} από τις στήλες του πίνακα \mathbf{A} με κάποια μέθοδο και για τη λύση αυτή την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Βήμα 2: Εκφράστε τα διανύσματα του πίνακα \mathbf{A} που δεν ανήκουν στη βάση συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίστε τις αντίστοιχες ποσότητες \mathbf{y}_j .

Βήμα 3: Υπολογίστε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης εφαρμόζοντας τη σχέση $z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j$.

Βήμα 4: Υπολογίστε τις ποσότητες $z_j - c_j$.

- ✓ Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση.
- ✓ Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j < 0$, επιλέξτε το μη βασικό διάνυσμα \mathbf{a}_k για να εισέλθει στη βάση εφαρμόζοντας το κριτήριο (2^ο κριτήριο της παραγράφου 5.12):

$$z_k - c_k = \min_j \{ z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0 \}.$$

Βήμα 5: Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μία μη φραγμένη λύση. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα \mathbf{b}_r που θα εγκαταλείψει τη βάση, εφαρμόζοντας το κριτήριο:

$$\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \min_i \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\}$$

¹ Μπακόπουλος, Α., Χρυσοβέργης, Ι. (2004). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Συμμεών, σελίδα 254.

Βήμα 6: Υπολογίστε:

- I. Τη νέα βάση **B** αντικαθιστώντας το διάνυσμα \mathbf{b}_r με το μη βασικό διάνυσμα \mathbf{a}_k .
- II. Τη νέα βασική εφικτή λύση από τις σχέσεις:

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, i \neq r$$

$$\hat{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

- III. Τις νέες τιμές των ποσοτήτων y_{ij} , $z_j - c_j$ και z .

Βήμα 7: Επιστρέψτε στο βήμα 2 και επαναλάβετε τη διαδικασία.

Παράδειγμα 5.5

Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Αρχικά, μετατρέπουμε το πρόβλημα στην κανονική του μορφή εισάγοντας μία χαλαρή μεταβλητή. Τότε, το πρόβλημα γίνεται:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0s_1$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0$$

Από το παραπάνω σύστημα έχουμε:

Κεφάλαιο 6

Επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τη βοήθεια υπολογιστικών πακέτων

6.1 Εισαγωγή

Για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι διαθέσιμη μεγάλη ποικιλία λογισμικού, κατάλληλου όχι μόνο για μεγάλους υπολογιστές, αλλά ακόμα και για προσωπικούς υπολογιστές (PC). Φυσικά, η επίλυση πολύ μεγάλων προβλημάτων, στα οποία υπεισέρχονται χιλιάδες μεταβλητές και άλλοι τόσοι περιορισμοί (π.χ. αποκωδικοποίηση της έλικας του DNA στον τομέα της Ιατρικής, ψηφιοποίηση εικόνας σε videogames, βελτιστοποίηση σχήματος σε διάφορες κατασκευές, μοντελοποίηση μετεωρολογικών

- II. Τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές απόφασης (decision variables). Τα κελιά αυτά είναι τα B16:E16.
- III. Τα κελιά στα οποία γίνονται οι διάφοροι υπολογισμοί. Τα κελιά αυτά είναι τα F5, F8:F13, I8:J13.
- IV. Τα υπόλοιπα κελιά περιέχουν κατατοπιστικές πληροφορίες - σχόλια για το χρήστη.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Εταιρία κατασκευών Gloman									
2	Δεδομένα (Input Data):									
3		Προϊόντα								
4		A	B	Γ	Δ	Σύνολο				
5	Αντικειμενική συνάρτηση	40	24	36	23	18300				
6	Περιορισμοί:									
7						Σύνολο πόρων		Όριο Περιορισμών	Slack	Surplus
8	Ωρες φρεζαρίσματος	2	1	2.5	5	1200	≤	1200	0	
9	Ωρες συναρμολόγησης	1	3	2.5	0	1600	≤	1600	0	
10	Διαθέσιμο κεφάλαιο για την αγορά πρώτων υλών	10	5	2	12	4700	≤	10000	5,300	
11	Ζήτηση προϊόντος A	1	0	0	0	100	≤	200	100	
12	Ζήτηση προϊόντος Γ	0	0	1	0	0	≤	160	160	
13	Ελάχιστη παραγωγή Δ	0	0	0	1	100	≥	100		0
14	Αποτελέσματα (Output Results):									
15		A	B	Γ	Δ					
16	Λύση	100	500	0	100					

Εικόνα 6.1: Υπολογιστικό φύλλο του Excel για την επίλυση του προβλήματος της εταιρίας Gloman

Πιο αναλυτικά, στο πάνω τμήμα της εικόνας 6.1 έχουν καταχωρηθεί τα δεδομένα του προβλήματος, σε μορφή που να μπορεί να επεξεργαστεί ο Solver. Αντίστοιχα, στο κάτω τμήμα της εικόνας και στις θέσεις B16:E16 βρίσκονται

¹ Αντιστοιχεί στα κελιά B8:B13, C8:C13, D8:D13, E8:E13.

συνάρτησης είναι το F5 και ότι ενώ αρχικά η αντικειμενική συνάρτηση είχε τιμή 0 “Original Value”, μετά την επίλυση απέκτησε την τιμή 18,300.

- Την περιοχή με τίτλο **Adjustable Cells**, όπου φαίνεται ότι οι μεταβλητές (προς υπολογισμό) βρίσκονται στα κελιά B16:E16, είχαν όλες αρχική τιμή 0 και ότι η λύση που βρέθηκε είναι: 100 μονάδες προϊόντος A, 500 μονάδες προϊόντος B, καθόλου Γ και 100 μονάδες του προϊόντος Δ.

Answer Report					
Worksheet: [Gloman]Sheet1					
Target Cell (Max)					
Cell	Name	Original Value	Final Value		
\$F\$5	Αντικειμενική συνάρτηση	0	18300		
Adjustable Cells					
Cell	Name	Original Value	Final Value		
\$B\$16	Λύση A	0	100		
\$C\$16	Λύση B	0	500		
\$D\$16	Λύση Γ	0	0		
\$E\$16	Λύση Δ	0	100		
Constraints					
Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$F\$8	Ωρες φρεζαρίσματος	1200	\$F\$8<=\$H\$8	Binding	0
\$F\$9	Ωρες συναρμολόγησης	1600	\$F\$9<=\$H\$9	Binding	0
\$F\$10	Διαθέσιμο κεφάλαιο για την αγορά πρώτων υλών	4700	\$F\$10<=\$H\$10	Not Binding	5300
\$F\$11	Ζήτηση προϊόντος A	100	\$F\$11<=\$H\$11	Not Binding	100
\$F\$12	Ζήτηση προϊόντος Γ	0	\$F\$12<=\$H\$12	Not Binding	160
\$F\$13	Ελάχιστη παραγωγή Δ	100	\$F\$13>=\$H\$13	Binding	0
\$B\$16	Λύση A	100	\$B\$16>=0	Not Binding	100
\$C\$16	Λύση B	500	\$C\$16>=0	Not Binding	500
\$D\$16	Λύση Γ	0	\$D\$16>=0	Binding	0
\$E\$16	Λύση Δ	100	\$E\$16>=0	Not Binding	100

Εικόνα 6.5: Αναφορά απάντησης για το πρόβλημα της εταιρίας Gloman

- Την περιοχή με τίτλο “**Constraints**” (περιορισμοί), όπου φαίνονται:
 - i. το είδος κάθε περιορισμού,

Κεφάλαιο 7

Το δυϊκό πρόβλημα

7.1 Εισαγωγή

Η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού βασίζεται στις εφήμερες συνθήκες που κυριαρχούν τη στιγμή κατά την οποία το μοντέλο του προβλήματος κατασκευάζεται και επιλύεται. Σε προβλήματα πραγματικών συνθηκών, τα διάφορα περιβάλλοντα αποφάσεων παραμένουν στατικά μόνο σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να καθορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η βέλτιστη λύση όταν αλλάζουν οι παράμετροι του μοντέλου. Με αυτό το πρόβλημα ασχολείται η **ανάλυση ευαισθησίας**. Παρέχει ικανές υπολογιστικές τεχνικές που βοηθούν στη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της βέλτιστης λύσης, η οποία προκύπτει από τις διάφορες αλλαγές που προκύπτουν στις παραμέτρους του μοντέλου. Έχουμε ήδη ασχοληθεί με την ανάλυση ευαισθησίας στις παραγράφους 4.3 και 6.2.2. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με τη θεωρία

της δυϊκότητας, έτσι ώστε να παρέχουμε έναν αλγεβρικό τρόπο αντιμετώπισης αυτού του τόσο σημαντικού πρακτικού προβλήματος.

7.2 Ορισμός του δυϊκού προβλήματος

Το **δυϊκό** πρόβλημα (**dual** problem) είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο καθορίζεται με ντετερμινιστικό τρόπο από το αρχικό ή **πρωτεύον** (**primal** or **original** problem) μοντέλο προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Η συσχέτιση των δύο προβλημάτων είναι τόσο απόλυτη, ώστε αν με κάποιο τρόπο (π.χ. επίλυση με τη μέθοδο Simplex) αποκτήσουμε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, οδηγούμαστε με φυσιολογικό τρόπο στη λύση του δυϊκού (και αντιστρόφως). Το είδος της βελτιστοποίησης (max ή min), οι μορφές των ανισοτήτων των περιορισμών (\leq, \geq ή $=$), καθώς και το είδος των μεταβλητών (ελεύθερες χωρίς πρόσημο ή μη αρνητικές) του πρωτεύοντος προβλήματος, προσδιορίζουν πλήρως το δυϊκό πρόβλημα.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μία απλή διαδικασία που καλύπτει όλες τις μορφές του πρωτεύοντος προβλήματος. Η κατασκευή του δυϊκού προβλήματος προϋποθέτει να τεθεί το πρωτεύον πρόβλημα στην κανονική του μορφή, που έχουμε ήδη παρουσιάσει στο κεφάλαιο 5 (όλοι οι περιορισμοί είναι ισότητες με μη αρνητικά δεύτερα μέλη και ισχύει για όλες τις μεταβλητές ο περιορισμός μη αρνητικότητας).

Από εδώ και στο εξής, οποιαδήποτε αποτελέσματα προκύψουν από τη λύση του αρχικού προβλήματος εφαρμόζονται κατευθείαν στο αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα. Για να δείξουμε πώς κατασκευάζεται το δυϊκό πρόβλημα, γράφουμε το αρχικό μας πρόβλημα σε μορφή εξισώσεων ως εξής:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max(\text{ή } \min) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n$$

Οι μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n περιλαμβάνουν ελλειμματικές, πλεονασματικές και τεχνητές μεταβλητές, αν βέβαια υπάρχουν στο πρόβλημά μας. Ο πίνακας 7.1 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το δυϊκό πρόβλημα κατασκευάζεται από το πρωτεύον.

		Μεταβλητές του πρωτεύοντος προβλήματος					
		x_1	...	x_j	...	x_n	
Μεταβλητές του δυϊκού		c_1	...	c_j	...	c_n	
	y_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
	y_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2

	y_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m

j -στος δυϊκός περιορισμός
 Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης δυϊκού προβλήματος

Πίνακας 7.1: Κατασκευή δυϊκού προβλήματος

Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν τα εξής:

1. Για κάθε μία εξίσωση (περιορισμό) του πρωτεύοντος προβλήματος καθορίζουμε και μια μεταβλητή στο δυϊκό πρόβλημα.
2. Για κάθε μία μεταβλητή του πρωτεύοντος προβλήματος καθορίζουμε και ένα περιορισμό στο δυϊκό πρόβλημα.

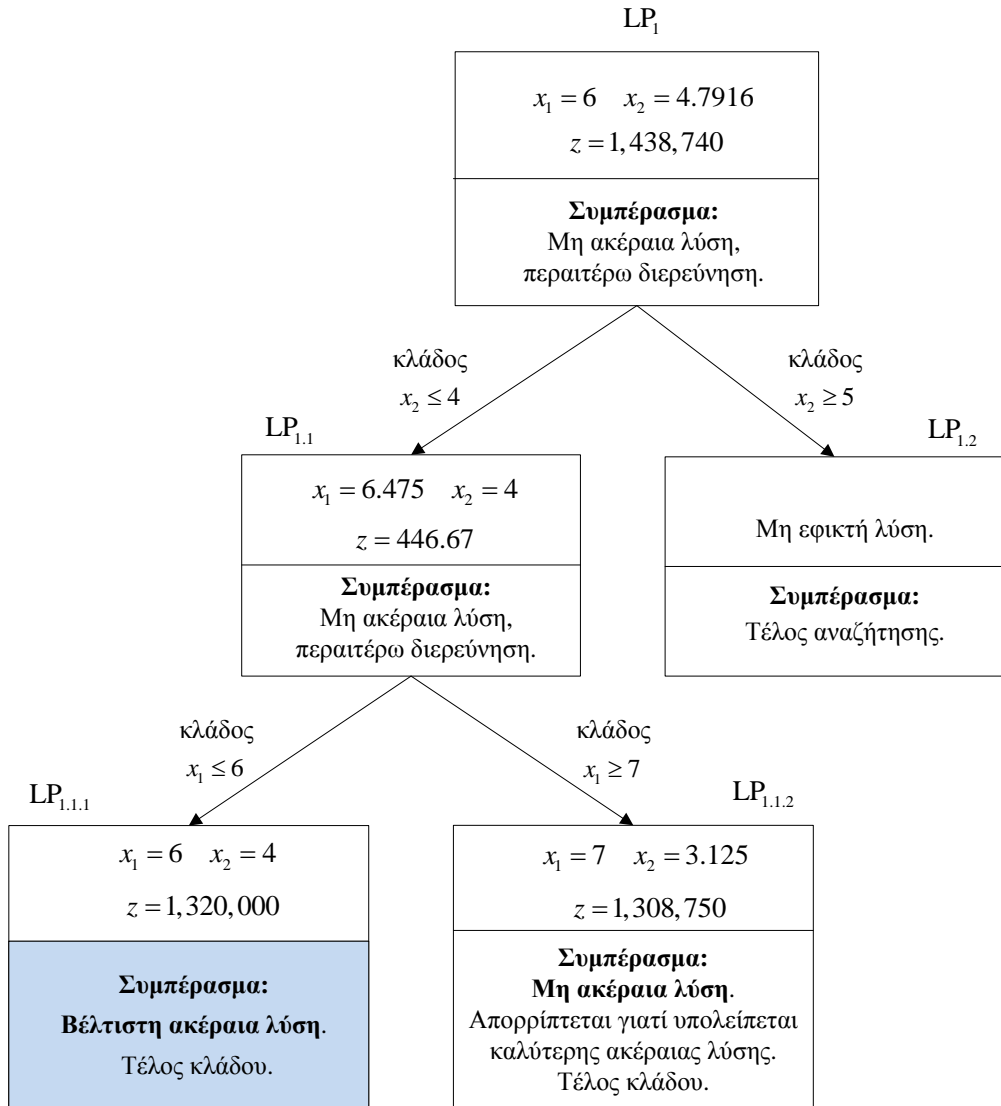
Κεφάλαιο 8

Ακέραιος Προγραμματισμός

8.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα του **Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (Integer Linear Programming - ILP)** είναι εκείνα τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού, των οποίων όλες ή μερικές από τις μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες (διακριτές) τιμές.

Το μαθηματικό μοντέλο του Ακέραιου Προγραμματισμού είναι ίδιο με εκείνο του Γραμμικού Προγραμματισμού με τον επιπλέον περιορισμό των ακέραιων μεταβλητών. Για τις μεταβλητές που είναι ακέραιες, καταργείται επομένως η προϋπόθεση της διαιρετότητας (παράγραφος 3.3). Εάν ορισμένες μόνο από τις μεταβλητές απαιτείται να είναι ακέραιες και επομένως η ιδιότητα της διαιρετότητας ισχύει για τις υπόλοιπες, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα **μεικτού** Ακέραιου Προγραμματισμού (mixed ILP). Στην περίπτωση όμως που όλες οι μεταβλητές απαιτείται να είναι ακέραιες, τότε το



Σχήμα 8.11: Δένδρο του B&B αλγορίθμου για το LP_1 πρόβλημα

Παράδειγμα 8.3

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού με δυαδικές μεταβλητές:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4$$

Αρχικό Simplex tableau:

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_2	(Λύση)
x_1	1	0	0	0	0	0	0	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	0	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	0	35/6
s_1	0	0	0	1	2/3	0	0	5/3
R_2	0	0	0	0	-5/6	0	1	-5/6
z	0	0	0	0	1/3	1	-M	40/3

Πίνακας 8.18

Όπως και πριν, μπορούμε να εξαλείψουμε την ασυνέπεια της z -γραμμής πολλαπλασιάζοντας με M την R_2 -γραμμή και προσθέτοντάς την στην z -γραμμή. Προκύπτει το τροποποιημένο Simplex tableau:

Τροποποιημένο Simplex tableau

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_2	(Λύση)
x_1	1	0	0	0	0	0	0	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	0	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	0	35/6
s_1	0	0	0	1	2/3	0	0	5/3
R_2	0	0	0	0	-5/6	0	1	-5/6
z	0	0	0	0	$\frac{1}{3} - \frac{5}{6}M$	1	0	$\frac{40}{3} - \frac{5}{6}M$

Πίνακας 8.19

Κεφάλαιο 9

Το πρόβλημα της μεταφοράς

9.1 Εισαγωγή

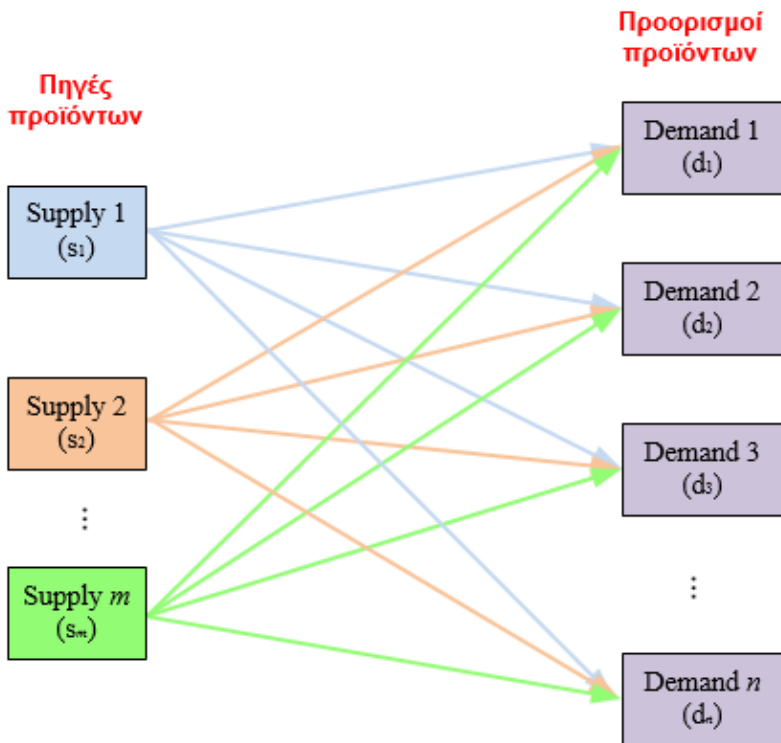
Το **πρόβλημα μεταφοράς** (transportation problem) είναι μια ειδική κατηγορία προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού, η οποία ασχολείται συνήθως με περιπτώσεις αποστολής προϊόντων προερχόμενων από διάφορες **πηγές** (**origins, sources**) σε διάφορους **προορισμούς** (**destinations**). Οι πηγές μπορεί να είναι εργοστάσια, σημεία φόρτωσης, κ.α., ενώ οι προορισμοί μπορεί να είναι κέντρα κατανάλωσης, πόλεις, αποθήκες κ.α. Σκοπός είναι ο προσδιορισμός ενός πλάνου μεταφοράς που μειώνει στο ελάχιστο το συνολικό κόστος μεταφοράς, ενώ παράλληλα ικανοποιεί τους διάφορους περιορισμούς προσφοράς και ζήτησης. Το πρόβλημα της μεταφοράς προϋποθέτει ότι το κόστος μεταφοράς είναι ανάλογο του αριθμού των μονάδων που μεταφέρονται σε μια συγκεκριμένη διαδρομή.

Γενικά, το πρόβλημα της μεταφοράς μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες περιοχές της επιχειρησιακής έρευνας, όπως είναι ο έλεγχος των αποθηκών, η διαχείριση ανθρώπινου δυναμικού κ.τ.λ. Παρόλο που το πρόβλημα της

μεταφοράς μπορεί να επιλυθεί σαν ένα κανονικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, η ειδική του δομή επιτρέπει την ανάπτυξη ενός υπολογιστικού αλγορίθμου τύπου Simplex, ο οποίος χρησιμοποιεί τις σχέσεις πρωτεύοντος - δυικού προβλήματος προκειμένου να απλοποιήσει τους υπολογισμούς. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει τον αλγόριθμο αυτόν και τονίζει τη στενή του σχέση με τη μέθοδο Simplex.

Ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς ονομάζεται **βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς** (optimal transportation plan) και προκύπτει με βάση το κριτήριο του συνολικού κόστους μεταφοράς των αγαθών από τις διάφορες πηγές στους διάφορους προορισμούς. Σημειώνουμε ότι η **προσφορά - δυναμικότητα** (supply, capacity) κάθε πηγής είναι περιορισμένη.

9.2 Ορισμός του προβλήματος της μεταφοράς



Σχήμα 9.1: Το γενικό πρόβλημα μεταφοράς

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400 250 0
	Λουτράκι	180	80	240	300	450 0 0
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350 300 0
Ζήτηση		150 0	700 450 0	50 50 0	300 0	1200

Πίνακας 9.32

Η ταυτόχρονη αυτή διαγραφή γραμμής και στήλης έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία της λύσης του πίνακα 9.33 με 5 βασικές μεταβλητές αντί για 6, δηλαδή τη δημιουργία μίας εκφυλισμένης λύσης.

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	450
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	50	300	1200

Πίνακας 9.33

Σαν αποτέλεσμα, είναι αδύνατο για τα περισσότερα από τα κελιά του πίνακα να χαράξουμε μονοπάτια ανακατανομής των εκχωρήσεων. Επιπρόσθετα, δεν είναι δυνατό να επιλυθεί το σύστημα των u_i και v_j , καθώς έχουμε $m+n-2=5$ εξισώσεις και $m+n=7$ αγνώστους. Επιβάλλεται λοιπόν **μία ακόμα βασική μεταβλητή**, την οποία αφού δεν έχουμε, θα δημιουργήσουμε **τεχνητά**, με το ακόλουθο πολύ εύκολο τέχνασμα: Όταν

Κεφάλαιο 10

Έλεγχος αποφάσεων υπό αβεβαιότητα - Δένδρα αποφάσεων

10.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ερευνήσουμε την εμπλοκή πιθανοτήτων στις αποφάσεις των επιχειρήσεων, όταν αυτές πρέπει να ληφθούν υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Θα αναπτύξουμε μεθοδολογία προκειμένου να παίρνουμε αποφάσεις, καθώς και να υπολογίζουμε το κόστος της αβεβαιότητας.

Αρχικά, θα εφαρμόσουμε το κριτήριο της αναμενόμενης (προσδοκώμενης, expected) αξίας υπό συνθήκη και στη συνέχεια το κριτήριο του αναμενόμενου (προσδοκώμενου) κόστους ευκαιρίας. Ακόμα, θα πειραματιστούμε προσπαθώντας να καθορίσουμε πιθανότητες για τα διάφορα ενδεχόμενα πριν προχωρήσουμε στη λήψη μιας απόφασης. Τέλος, θα παρουσιάσουμε τα δένδρα αποφάσεων σαν ένα εναλλακτικό τρόπο λήψης μιας απόφασης.

$$EMV > 0 \Leftrightarrow 400,000p > 100,000 \Leftrightarrow p > 1/4.$$

Επομένως, θεωρείται κρίσιμη πιθανότητα η $p = 1/4 = 25\%$.

Συμπέρασμα: Αν ο επιχειρηματίας πιστεύει (είτε από διαίσθηση είτε από προηγούμενη εμπειρία σε ανάλογα προϊόντα είτε από έρευνα αγοράς κ.τ.λ.) ότι η πιθανότητα ευρείας αποδοχής του νέου προϊόντος είναι μεγαλύτερη από 25%, τότε θα πρέπει να αποφασίσει την εισαγωγή του νέου προϊόντος και μάλιστα χωρίς να τον ενδιαφέρει ο ακριβής προσδιορισμός της πιθανότητας επιτυχίας.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του παντοπώλη εφαρμόζουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε στην παράγραφο 10.3 για τις διαφορετικές επιλογές πιθανοτήτων του πίνακα 10.13 που ακολουθεί.

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητες						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
20 κιβώτια	0.05	0.05	0.01	0.05	0.05	0.01	0.05
21 κιβώτια	0.16	0.15	0.19	0.10	0.05	0.02	0.05
22 κιβώτια	0.75	0.30	0.20	0.30	0.10	0.17	0.09
23 κιβώτια	0.02	0.45	0.55	0.50	0.70	0.79	0.80
24 κιβώτια	0.02	0.05	0.05	0.05	0.10	0.01	0.01

Πίνακας 10.13: Διάφορες επιλογές πιθανοτήτων

Παράγουμε τους πίνακες 10.14-10.20 που αντιστοιχούν στον πίνακα 10.4 της παραγράφου 10.3 για τις διάφορες επιλογές πιθανοτήτων του πίνακα 10.13.

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργειες-παραγγελίες				
		WCV (Weighted Conditional Value)				
		20	21	22	23	24
20 κιβώτια	0.05	3.00 €	2.40 €	1.80 €	1.20 €	0.60 €
21 κιβώτια	0.16	9.60 €	10.08 €	8.16 €	6.24 €	4.32 €
22 κιβώτια	0.75	45.00 €	47.25 €	49.50 €	40.50 €	31.50 €
23 κιβώτια	0.02	1.20 €	1.26 €	1.32 €	1.38 €	1.14 €
24 κιβώτια	0.02	1.20 €	1.26 €	1.32 €	1.38 €	1.44 €
Σύνολο	1.00	60.00 €	62.25 €	62.10 €	50.70 €	39.00 €

Πίνακας 10.14: Βέλτιστη απόφαση “παραγγέλνω 21 κιβώτια”

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργειες-παραγγελίες				
		WCV				
		20	21	22	23	24
20 κιβώτια	0.05	3.00 €	2.40 €	1.80 €	1.20 €	0.60 €
21 κιβώτια	0.15	9.00 €	9.45 €	7.65 €	5.85 €	4.05 €
22 κιβώτια	0.30	18.00 €	18.90 €	19.80 €	16.20 €	12.60 €
23 κιβώτια	0.45	27.00 €	28.35 €	29.70 €	31.05 €	25.65 €
24 κιβώτια	0.05	3.00 €	3.15 €	3.30 €	3.45 €	3.60 €
Σύνολο	1.00	60.00 €	62.25 €	62.25 €	57.75 €	46.50 €

Πίνακας 10.15: Βέλτιστη απόφαση “παραγγέλνω 21 κιβώτια ή 22 κιβώτια”

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργειες-παραγγελίες				
		WCV				
		20	21	22	23	24
20 κιβώτια	0.01	0.60 €	0.48 €	0.36 €	0.24 €	0.12 €
21 κιβώτια	0.19	11.40 €	11.97 €	9.69 €	7.41 €	5.13 €
22 κιβώτια	0.20	12.00 €	12.60 €	13.20 €	10.80 €	8.40 €
23 κιβώτια	0.55	33.00 €	34.65 €	36.30 €	37.95 €	31.35 €
24 κιβώτια	0.05	3.00 €	3.15 €	3.30 €	3.45 €	3.60 €
Σύνολο	1.00	60.0 €	62.85 €	62.85 €	59.85 €	48.60 €

Πίνακας 10.16: Βέλτιστη απόφαση “παραγγέλνω 21 κιβώτια ή 22 κιβώτια”

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργειες-παραγγελίες				
		WCV				
		20	21	22	23	24
20 κιβώτια	0.05	3.00 €	2.40 €	1.80 €	1.20 €	0.60 €
21 κιβώτια	0.10	6.00 €	10.08 €	8.16 €	6.24 €	4.32 €
22 κιβώτια	0.30	18.00 €	47.25 €	49.50 €	40.50 €	31.50 €
23 κιβώτια	0.50	30.00 €	1.26 €	1.32 €	1.38 €	1.14 €
24 κιβώτια	0.05	3.00 €	1.26 €	1.32 €	1.38 €	1.44 €
Σύνολο	1.00	60.0 €	62.25 €	63.00 €	59.25 €	48.00 €

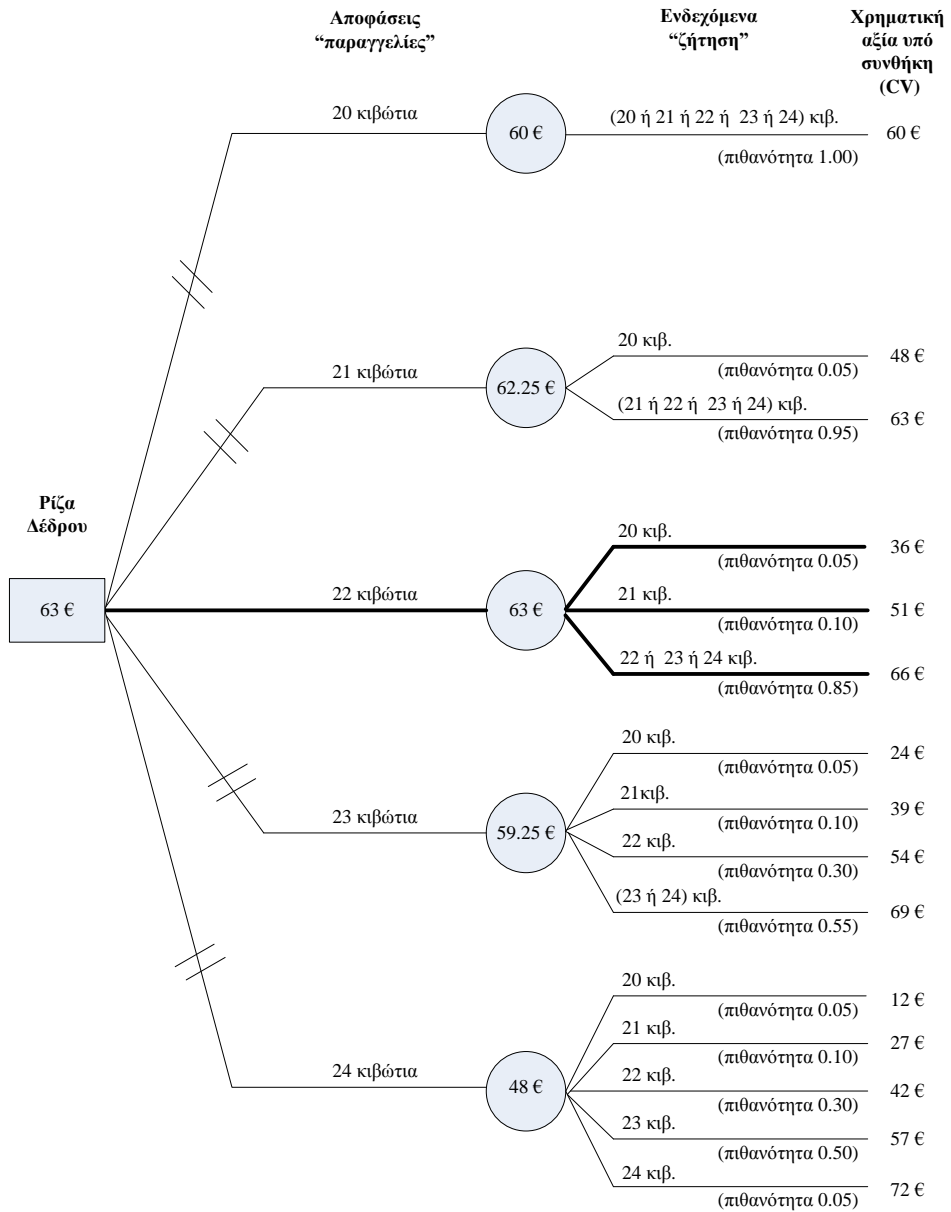
Πίνακας 10.17: Βέλτιστη απόφαση “παραγγέλνω 22 κιβώτια”

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργειες-παραγγελίες				
		WCV				
		20	21	22	23	24
20 κιβώτια	0.05	3.00 €	2.40 €	1.80 €	1.20 €	0.60 €
21 κιβώτια	0.05	6.00 €	3.15 €	2.55 €	1.95 €	1.35 €
22 κιβώτια	0.10	6.00 €	6.30 €	6.60 €	5.40 €	4.20 €
23 κιβώτια	0.70	42.00 €	44.10 €	46.20 €	48.30 €	39.90 €
24 κιβώτια	0.10	6.00 €	6.30 €	6.60 €	6.90 €	7.20 €
Σύνολο	1.00	60.0 €	62.25 €	63.75 €	63.75 €	53.25 €

Πίνακας 10.18: Βέλτιστη απόφαση “παραγγέλνω 22 κιβώτια ή 23 κιβώτια”

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργειες-παραγγελίες				
		WCV				
		20	21	22	23	24
20 κιβώτια	0.01	0.60 €	0.48 €	0.36 €	0.24 €	0.12 €
21 κιβώτια	0.02	1.20 €	1.26 €	1.02 €	0.78 €	0.54 €
22 κιβώτια	0.17	10.20 €	10.71 €	11.22 €	9.18 €	7.14 €
23 κιβώτια	0.79	47.40 €	49.77 €	52.14 €	54.51 €	45.03 €
24 κιβώτια	0.01	0.60 €	0.63 €	0.66 €	0.69 €	0.72 €
Σύνολο	1.00	60.0 €	62.85 €	65.40 €	65.40 €	53.55 €

Πίνακας 10.19: Βέλτιστη απόφαση “παραγγέλνω 22 κιβώτια ή 23 κιβώτια ”



Σχήμα 10.1: Δένδρο απόφασης για το παράδειγμα με το γαλακτοπώλη

Κεφάλαιο 11

Έλεγχος αποθεμάτων

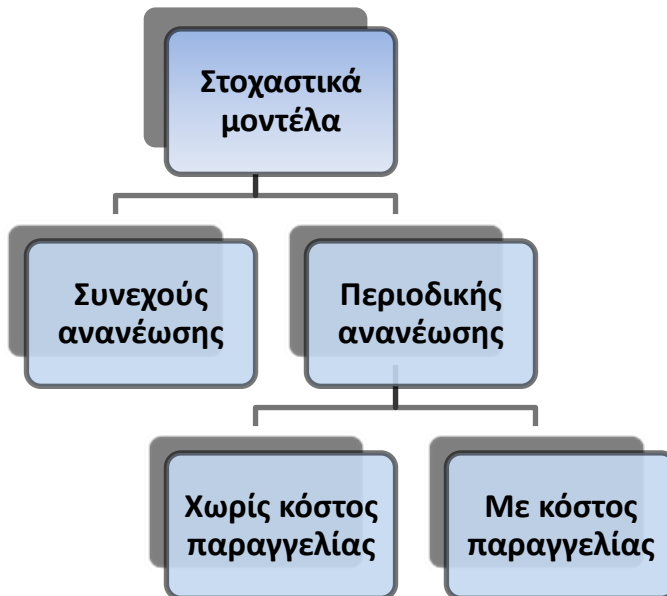
11.1 Εισαγωγή

Ένας από τους σημαντικότερους συντελεστές για την επιτυχία μιας επιχείρησης είναι η πολιτική που θα ακολουθηθεί σχετικά με τις παραγγελίες (ή την παραγωγική διαδικασία) και την αποθήκευση των πρώτων υλών και προϊόντων της. Με άλλα λόγια, η ορθή διαχείριση των αποθεμάτων της. Με τον όρο απόθεμα εννοούμε την ποσότητα ενός προϊόντος που μένει προσωρινά αχρησιμοποίητο, με σκοπό να ικανοποιήσει τη ζήτηση γι' αυτό το προϊόν, σε χρονικές περιόδους όπου η ζήτηση είναι μεγαλύτερη από την προσφορά. Αποθέματα δημιουργούνται, όταν οι εισερχόμενες ποσότητες πρώτων υλών, εξαρτημάτων και προϊόντων σε μια επιχείρηση ξεπερνούν τις εξερχόμενες ποσότητες.

Τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων έχουν γενικά ως σκοπό τον άριστο προγραμματισμό των παραγγελιών και της διαχείρισης των πρώτων υλών ή και των προϊόντων μιας επιχείρησης. Στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί μια συνολική συνάρτηση κόστους λειτουργίας που περιλαμβάνει κόστη παραγγελίας, αγοράς, μεταφοράς, αποθήκευσης, έλλειψης προϊόντος κ.ά., λαμβάνοντας υπόψη διάφορες συνθήκες σχετικά με τη ζήτηση, το περιβάλλον και διάφορους άλλους παράγοντες.

11.8 Έλεγχος αποθεμάτων με αβέβαιη ζήτηση

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε την αρχική μας υπόθεση ότι η ζήτηση έχει σταθερό ρυθμό κατά τη διάρκεια όλου του έτους, που αποτέλεσε το θεμέλιο δομικό λίθο των υποθέσεών μας μέχρι αυτό το σημείο και θα θεωρήσουμε τη ζήτηση για μια περίοδο ως μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή, με γνωστή κατανομή. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται τα διαφορετικά είδη στοχαστικών μοντέλων που μπορεί να συναντήσει κανείς στη βιβλιογραφία.



11.8.1 Μοντέλα συνεχούς ανανέωσης

Μοντέλο κόστους εξαντλήσεως του αποθέματος

Αντί να υποθέτουμε λοιπόν ότι η ζητούμενη ποσότητα είναι γνωστή και σταθερή, θεωρούμε γνωστή μόνο την κατανομή της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής μέχρι την παράδοση της επόμενης παραγγελίας και όχι την ακριβή ζήτηση κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Όταν θέσουμε ένα

σημαντικότητας τον εβδομαδιαίο όγκο των πωλήσεων τους και σχηματίζουμε τον πίνακα 11.11.

Είδη	Ποσοστό ειδών (%)	Πωλήσεις	Αθροιστικές πωλήσεις	Αθροιστικές πωλήσεις (%)
Ε	12.5	4,150	4,150	43.7
Η	25.0	2,120	6,270	66.0
Β	37.5	1,200	7,470	78.6
Θ	50.0	890	8,360	88.0
Ζ	62.5	480	8,840	93.1
Α	75.0	350	9,190	96.7
Δ	87.5	180	9,370	98.6
Γ	100.0	130	9,500	100

Πίνακας 11.11

Στη συνέχεια, σχηματίζουμε το ABC διάγραμμα (σχήμα 11.20). Παρατηρούμε ότι το 50% των πωλήσεων πραγματοποιείται από μόλις το 15% των προϊόντων, ενώ το 50% των προϊόντων (αυτά που είναι πιο σημαντικά) είναι υπεύθυνο για το 88% των εβδομαδιαίων πωλήσεων της επιχείρησης. Αν προσεγγιστικά θεωρήσουμε ότι το τελευταίο Α προϊόν πραγματοποιεί πωλήσεις λιγότερες από 2,000 € ανά εβδομάδα, ενώ το τελευταίο Β προϊόν πωλήσεις πάνω από 900 € ανά εβδομάδα τότε κάθε προϊόν του συνολικού αποθέματος με πωλήσεις πάνω από 2,000 € θα θεωρείται Α. Κάθε προϊόν με πωλήσεις πάνω 900 αλλά κάτω από 2,000 € θα θεωρείται τύπου Β, ενώ προϊόντα με πωλήσεις κάτω από 900 € θα θεωρούνται τύπου C.

Κεφάλαιο 12

Θεωρία ουρών αναμονής

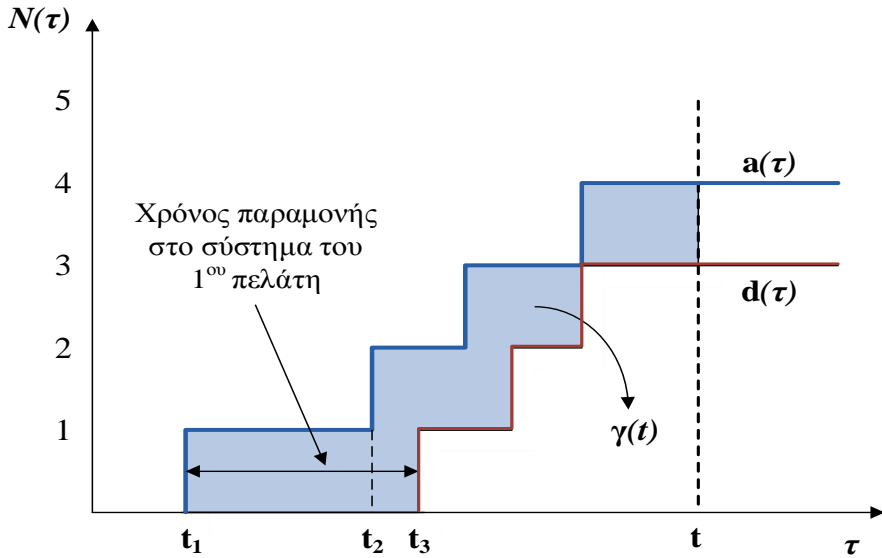
12.1 Εισαγωγή

Οι ουρές ή γραμμές αναμονής είναι πολύ συνηθισμένες στην καθημερινή ζωή. Πολλές φορές πρέπει να περιμένουμε σε μια ουρά για ένα λεωφορείο, ένα ταξί, ένα εισιτήριο στον κινηματογράφο ή ένα κούρεμα. Το σύστημα “φρακάρει” και εμείς περιμένουμε. Οι περισσότεροι από εμάς σκέφτονται τη συμφόρηση και την αναμονή με περισσότερο ή λιγότερο χιούμορ. Κατά καιρούς, το μήκος μιας ουράς στην οποία εισερχόμαστε μας αποθαρρύνει και εγκαταλείπουμε την προσδοκώμενη δραστηριότητα.

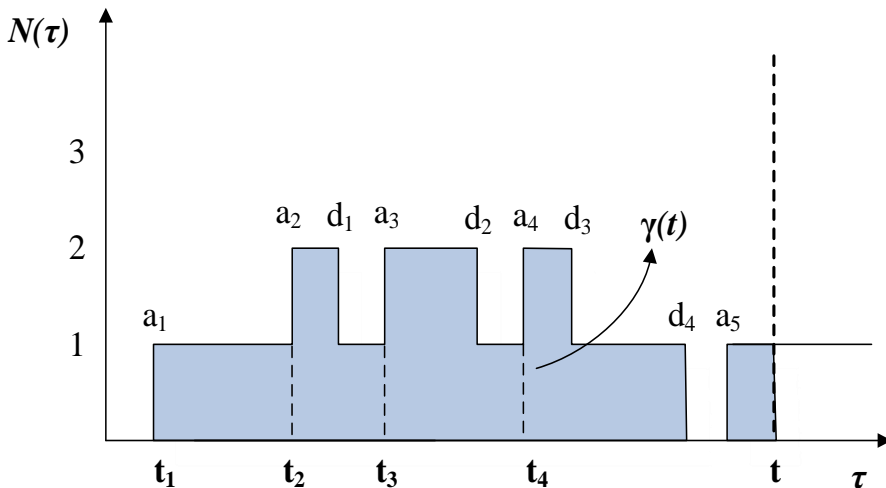
Οι ουρές δημιουργούνται, όταν η τρέχουσα ζήτηση για μια εξυπηρέτηση είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα δυναμικότητα του συστήματος, που παρέχει τη δραστηριότητα. Οι αποφάσεις που σχετίζονται με τον προσδιορισμό της δυναμικότητας του συστήματος πολλές φορές είναι δύσκολες, επειδή συχνά είναι αδύνατο να προβλεφθεί επακριβώς πότε θα αφιχθούν μονάδες¹ στο

¹ Οι αφίξεις ή μονάδες στο σύστημα μπορεί να είναι άνθρωποι που πρέπει να εξυπηρετηθούν, βιομηχανικές εργασίες, ροή εγγράφων (π.χ. αιτήσεις για πρωτοκόλληση), εξοπλισμός για επιδιόρθωση κ.α.

Δηλαδή, είναι ο λόγος του συνολικού χρόνου παραμονής όλων των πελατών στο σύστημα δια του αριθμού των πελατών.



Σχήμα 12.4: Συνολικός χρόνος παραμονής των πελατών στο σύστημα



Σχήμα 12.5: Συνολικός χρόνος παραμονής των πελατών στο σύστημα

Ο μέσος αριθμός πελατών σε αναμονή (στην ουρά) δίνεται πάλι από τον αντίστοιχο τύπο του Little (12.10):

$$L_q = \lambda W_q = \lambda \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \right) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Εάν $\lambda \geq \mu$ που σημαίνει μέσο ρυθμό αφίξεων ίσο ή μεγαλύτερο του μέσου ρυθμού εξυπηρετήσεων, το άθροισμα στον τύπο υπολογισμού του p_0 δεν συγκλίνει και επομένως δεν υπάρχει λύση μονίμου καταστάσεως λειτουργίας του συστήματος αναμονής. Αυτό είναι εύλογο, διότι όταν ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι μεγαλύτερος του μέσου ρυθμού εξυπηρετήσεων, είναι επόμενο να αυξάνεται απεριόριστα το μήκος της ουράς αναμονής.

12.9.2 Ανακεφαλαίωση για την περίπτωση ουράς (M/M/1)

$$\lambda_{eff} = \lambda_n = \lambda, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\mu_n = \mu, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

$$\mu_A = \frac{1}{\lambda} \quad (3)$$

$$\mu_S = \frac{1}{\mu} \quad (4)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \quad (6)$$

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \stackrel{(5)}{=} \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (8)$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} \quad (9)$$

$$W_q = W - \mu_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \stackrel{(5)}{=} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \stackrel{(8)}{=} \frac{L}{\mu} \quad (10)$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{W_q}{\mu_A} \stackrel{(10)}{=} \frac{\rho^2}{1-\rho} \stackrel{(5)}{=} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \stackrel{(5),(8)}{=} \rho L \quad (11)$$

$$\text{WTM} = \frac{W_q}{\mu_s} = \frac{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (12)$$

Συνεπώς, ισχύουν ακόμα:

$$W_q = \text{WTM} \cdot \mu_s \quad (13)$$

$$W = W_q + \mu_s \quad (14)$$

$$L = W_q \cdot \mu \stackrel{(10)}{=} \frac{W_q}{\mu_s} \quad (15)$$

$$c_{occ} = L - L_q = \rho \quad (16)$$

Η συνήθης πορεία για την επίλυση μιας άσκησης είναι η διαδοχική εφαρμογή των τύπων:

$$(3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (12) \rightarrow (13) \rightarrow (14) \rightarrow (15) \rightarrow (11).$$

Παράδειγμα 12.3

Μια τράπεζα διαθέτει ένα σύστημα τηλεφωνικής εξυπηρέτησης των πελατών της. Όλες οι εισερχόμενες κλήσεις κατευθύνονται σε έναν αυτόματο τηλεφωνητή. Εάν αυτός είναι ελεύθερος, η κλήση εξυπηρετείται άμεσα, αν όμως αυτός είναι κατειλημμένος, η εισερχόμενη κλήση τίθεται σε αναμονή. Όταν ο τηλεφωνητής ελευθερωθεί, αναλαμβάνει να εξυπηρετήσει την κλήση

Κεφάλαιο 13

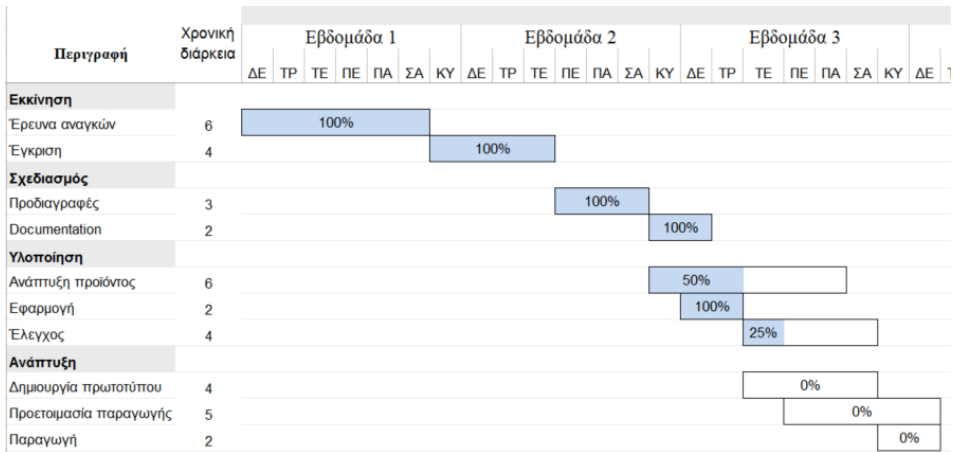
Διαχείριση Έργου (Project Management)

Πρώτα, να έχεις μία σαφή ιδέα, ένα καθορισμένο ιδανικό, ένα αντικειμενικό σκοπό, ένα στόχο. Δεύτερον, να διαθέτεις τα απαραίτητα μέσα, τη σοφία, τα χρήματα, τα υλικά και τις μεθόδους. Τρίτον, να προσαρμόσεις τα μέσα που διαθέτεις για να πετύχεις τους στόχους σου.

Αριστοτέλης

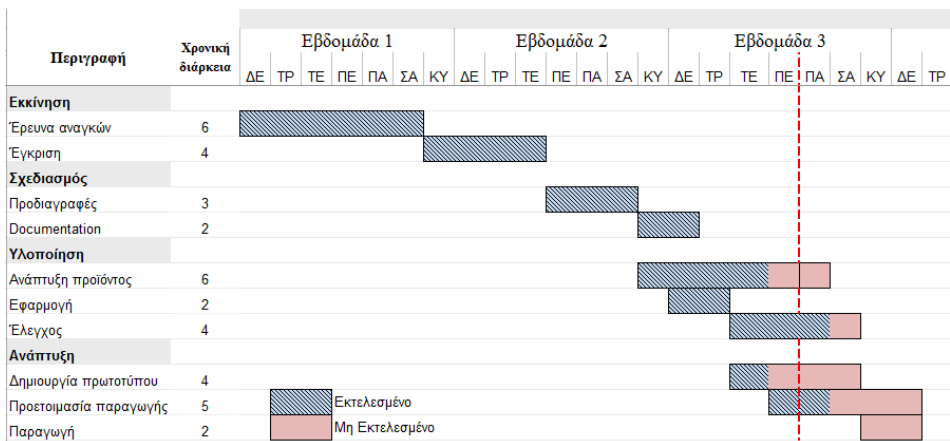
Those who plan do better than those who do not plan even though they rarely stick to their plan.

Winston Churchill



Διάγραμμα 13.3: Παράδειγμα διαγράμματος Gantt τύπου II

Διάγραμμα Gantt τύπου III

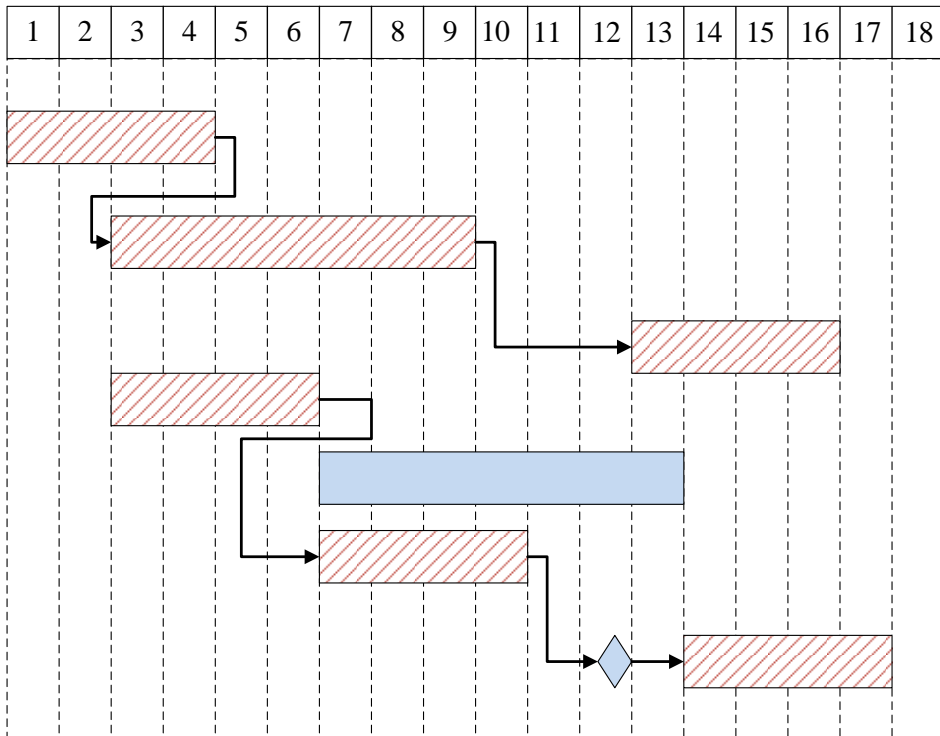


Διάγραμμα 13.4: Παράδειγμα διαγράμματος Gantt τύπου III

Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να δώσουμε έμφαση στο ποσοστό όπου μια προβλεπόμενη δραστηριότητα / εργασία είναι εκτελεσμένη, παριστάνοντας την εκάστοτε προβλεπόμενη και εκτελεσμένη εργασία στην ίδια μπάρα απλώς χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρώματα, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 13.4.

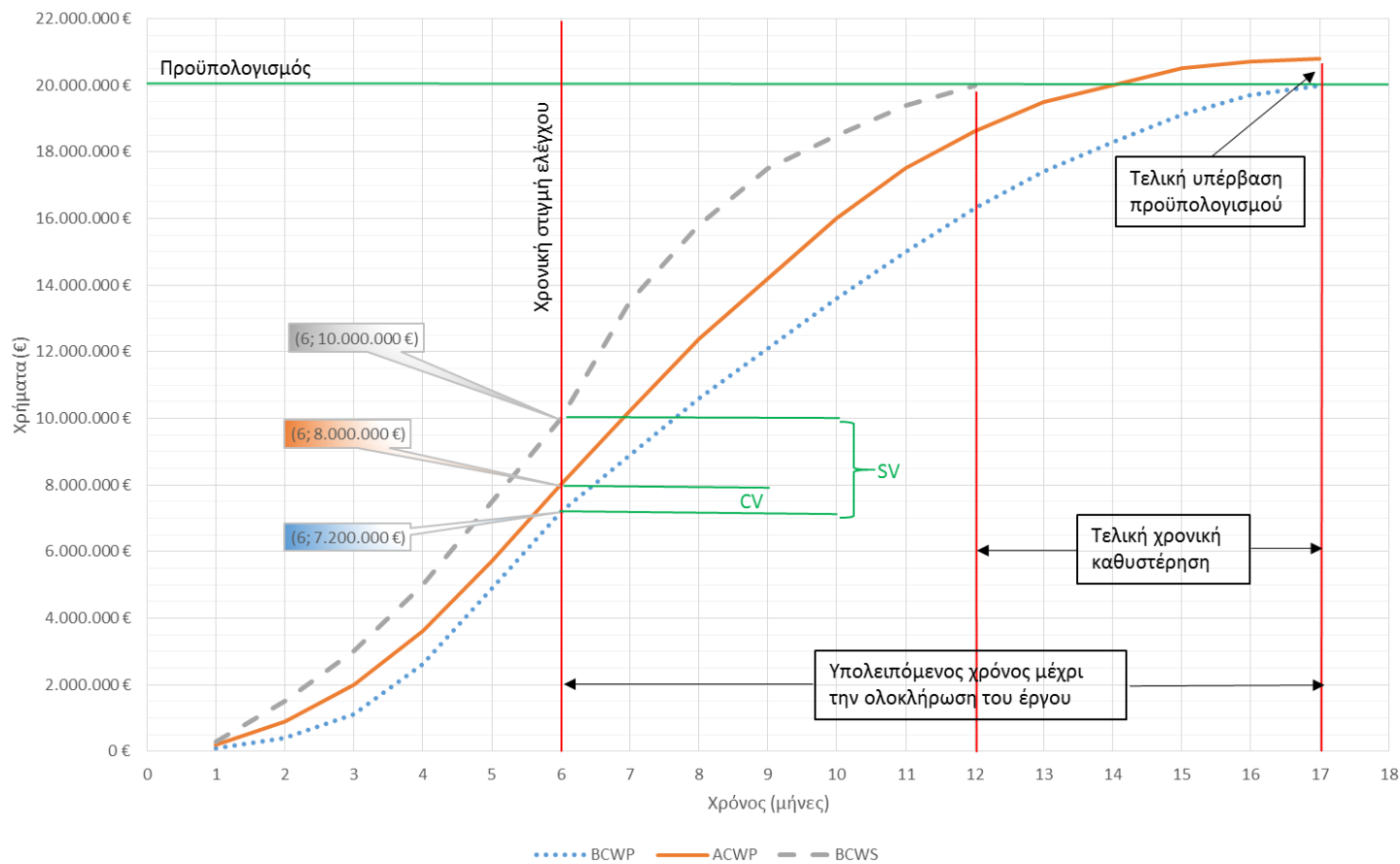
Διασυνδεδεμένα διαγράμματα Gantt

Στα διασυνδεδεμένα διαγράμματα Gantt συμπεριλαμβάνονται οι σχέσεις αλληλουχίας μεταξύ των δραστηριοτήτων που απαρτίζουν ένα έργο. Δηλαδή σε κάθε δραστηριότητα τοποθετούμε ένα βέλος που μας καταδεικνύει την αμέσως επόμενη ή τις αμέσως επόμενες δραστηριότητες, όπως φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



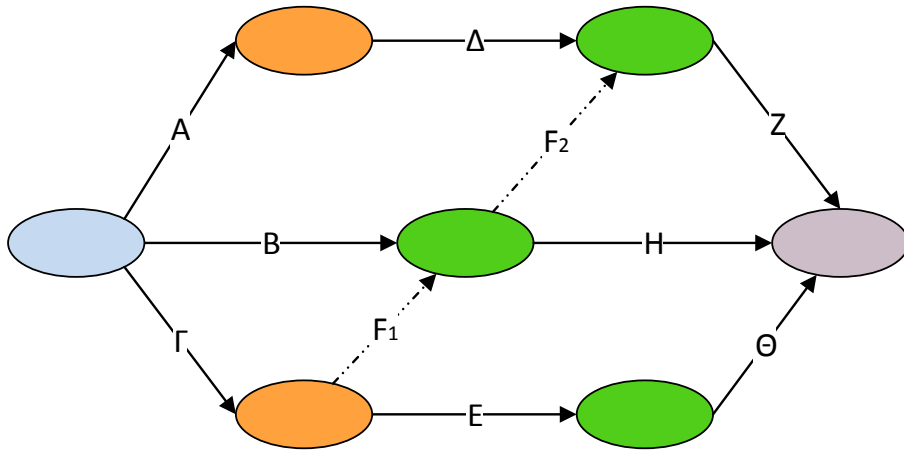
Διάγραμμα 13.5: Παράδειγμα διασυνδεδεμένου διαγράμματος Gantt

Έλεγχος οικονομικής και χρονικής πρόοδου έργου (S curve)



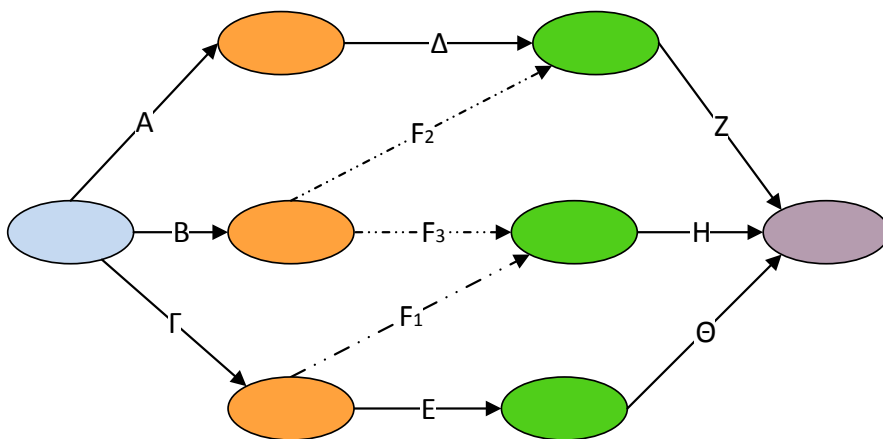
Διάγραμμα 13.9: Στοιχεία ελέγχου έργου

Δημιουργούμε το ακόλουθο δικτυωτό γράφημα:

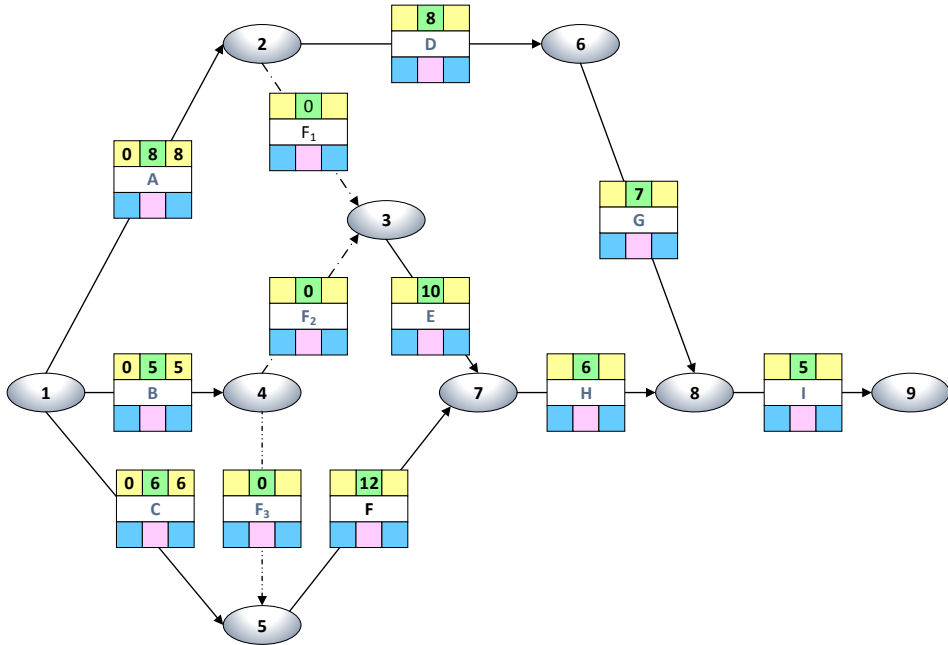


Σχήμα 13.12: Δικτυωτό γράφημα παραδείγματος

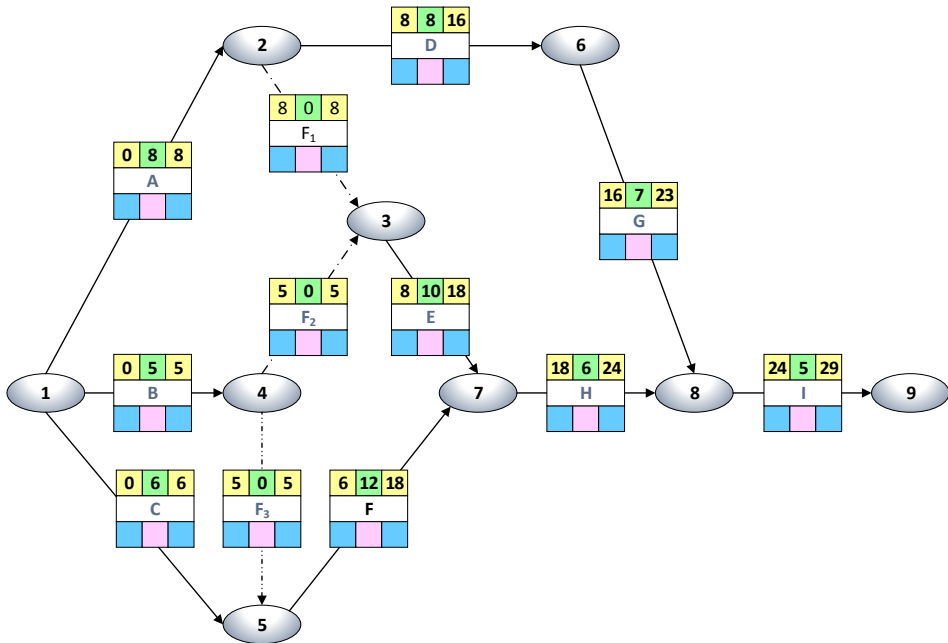
Το γράφημα αυτό δεν είναι ορθό γιατί εισάγει μια αλληλουχία δραστηριοτήτων $\Gamma \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow Z$ εκ των οποίων οι F_1, F_2 είναι διαδοχικές πλασματικές δραστηριότητες. Το σφάλμα του παραπάνω δικτύου είναι ότι περιέχει ως μη όφειλε την αλληλουχία σχέσεων “η δραστηριότητα Γ προηγείται της δραστηριότητας Z ”, η οποία δεν υπήρχε στις αρχικές υποθέσεις. Ένα ορθό δίκτυο για το παράδειγμα μας θα ήταν το ακόλουθο:



Σχήμα 13.13: Ορθό γράφημα για το δίκτυο του παραδείγματος

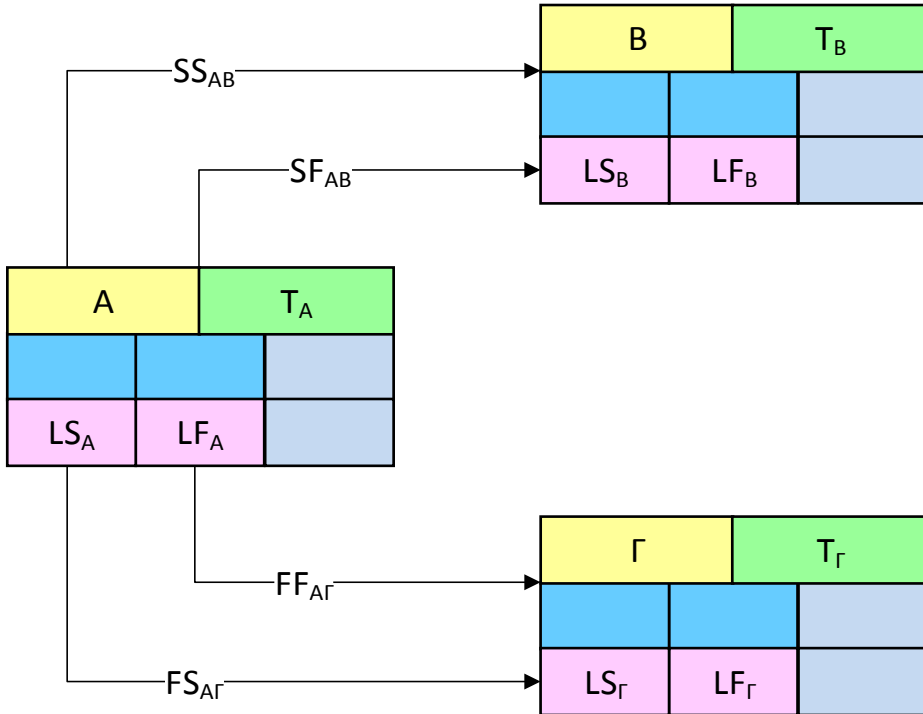


Σχήμα 13.30: Ομόρροπος υπολογισμός (2)



Σχήμα 13.31: Ομόρροπος υπολογισμός (3)

3^η Περίπτωση: Μια δραστηριότητα A έχει παραπάνω από μία επόμενες δραστηριότητες π.χ. B, Γ. Υποθέτουμε ακόμα ότι η A συνδέεται με τις B, Γ με πολλαπλές σχέσεις αλληλουχίας, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Το LF_A προκύπτει ως το ελάχιστο αποτέλεσμα απ' όλες τις σχέσεις αλληλουχίας που δίνονται.

$$LF_A = \min\{LS_B - SS_{AB} + T_A, LF_B - SF_{AB} + T_A, LS_\Gamma - FS_{A\Gamma}, LF_\Gamma - FF_{A\Gamma}\}$$

Αφού έχουμε υπολογίσει το LF_A της προηγούμενης δραστηριότητας A, το LS_A σε κάθε περίπτωση προκύπτει από τον τύπο:

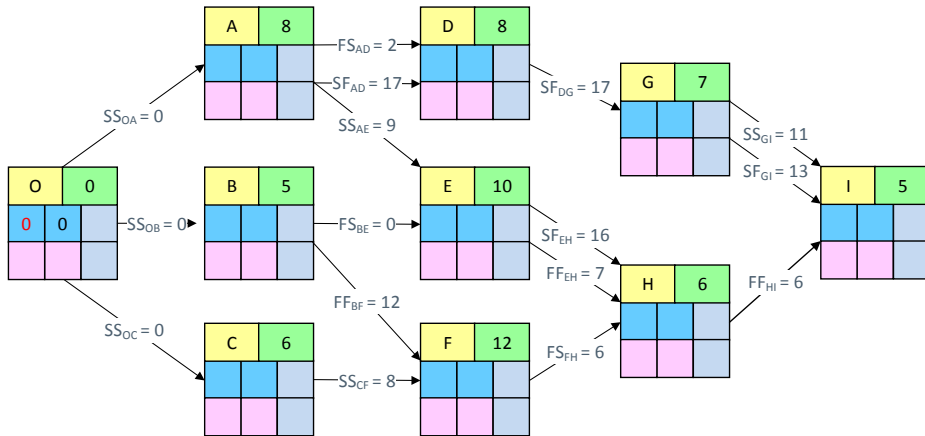
$$LS_A = LF_A - T_A.$$

Υπολογισμός των χρονικών περιθωρίων

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τους υπολογισμούς των διαφόρων χρονικών περιθωρίων που θα χρησιμοποιήσουμε για τον έλεγχο της ομαλής εκτέλεσης ενός έργου.

Ομόρροπος υπολογισμός δικτύου MPM

Αρχίζουμε με τον κανόνα για τους ενωρίτερους χρόνους της δραστηριότητας της αρχής:



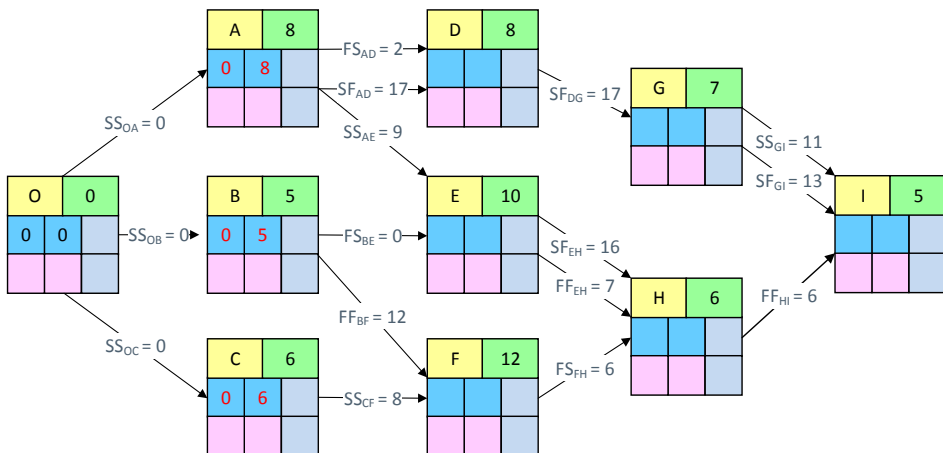
Σχήμα 13.39: Ομόρροπος υπολογισμός (1)

Συνεχίζουμε με τους ομόρροπους υπολογισμούς για τις δραστηριότητες A, B, C οι οποίες έχουν όλες **μόνο** μία προηγούμενη δραστηριότητα. Για παράδειγμα:

$$ES_A = ES_O + SS_{OA} = 0 + 0 = 0 \text{ και } EF_A = ES_A + T_A = 0 + 8 = 8$$

$$ES_B = ES_O + SS_{OB} = 0 + 0 = 0 \text{ και } EF_B = ES_B + T_B = 0 + 5 = 5$$

$$ES_C = ES_O + SS_{OC} = 0 + 0 = 0 \text{ και } EF_C = ES_C + T_C = 0 + 6 = 6$$



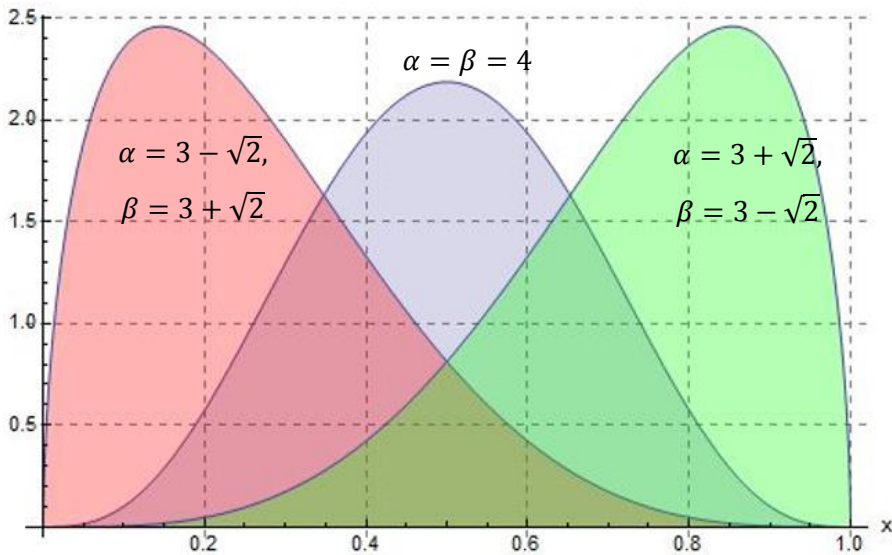
Σχήμα 13.40: Ομόρροπος υπολογισμός (2)

Η Βήτα κατανομή

Η Βήτα κατανομή μοιάζει με την κανονική κατανομή, αλλά λαμβάνει μόνο θετικές τιμές και μάλιστα στο διάστημα $[0,1]$. Το σχήμα της καθορίζεται από δυο θετικές παραμέτρους α, β . Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων μπορεί και να είναι συμμετρική. Τα άκρα της κατανομής Βήτα δεν πλησιάζουν ασυμπτωτικά τον x -άξονα όπως συμβαίνει στην κανονική κατανομή αλλά τέμνουν τον x -άξονα στο 0 και στο 1. Συμβολίζουμε $X \sim B(\alpha, \beta)$. Για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της Βήτα κατανομής ισχύει:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{και} \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta + 1)}$$

Μορφές της Βήτα κατανομής για διάφορα ζεύγη παραμέτρων φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.



Σχήμα 13.52: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β

Οι τιμές των παραμέτρων α, β της Βήτα κατανομής διαφοροποιούν σημαντικά τη μορφή της κατανομής και μας δίνουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουμε κάθε φορά τα δεδομένα μας στην κατάλληλη Βήτα κατανομή.

Κεφάλαιο 14

Θεωρία Παιγνίων (Game Theory)

“The Best for the Group comes when everyone in the group does what's best for himself and the group”.

“As you will find in multivariable calculus, there is often a number of solutions for any given problem”.

John Forbes Nash, Jr.¹

¹ Ο John Forbes Nash, Jr. (1928 - 2015): Αμερικανός μαθηματικός, με τεράστια συνεισφορά στην ανάπτυξη της Θεωρίας Παιγνίων, τη Διαφορική Γεωμετρία και τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Το έργο του έδωσε ώθηση στην κατανόηση των παραγόντων που κυβερνούν την τυχαιότητα μέσα σε πολύπλοκα συστήματα στην καθημερινή ζωή. Για τη συνεισφορά του στην επιστήμη, έλαβε το Νόμπελ Οικονομίας (1944) μαζί με τους Reinhard Selten και John Harsanyi. Το 1959 εμφάνισε σημάδια πνευματικής διαταραχής και για πολλά χρόνια της ζωής του μεταφέρθηκε σε πληθώρα ψυχιατρικών κλινικών με διαγνωσμένη παρανοϊκή σχιζοφρένεια. Μετά το 1970, όπου η κατάσταση της υγείας του βελτιώθηκε, επέστρεψε στην ακαδημαϊκή κοινότητα. Σκοτώθηκε με τη σύζυγό του στις 23 Μαΐου 2015 σε αυτοκινητιστικό δυστύχημα στο New Jersey, επιστρέφοντας από τη Νορβηγία, όπου παρέλαβε το βραβείο Abel.

14.4.1 Μέθοδος επίλυσης: maximin και minimax στρατηγική

Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο maximin - minimax στρατηγικής για την επίλυση ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος, βασισμένοι στο προηγούμενο παράδειγμα.

Η εταιρία K για καθεμία από τις 2 στρατηγικές της P, T, υπολογίζει το ελάχιστο (minimum) κέρδος:

Στρατηγική P: ελάχιστο (minimum) κέρδος = -4

Στρατηγική T: ελάχιστο (minimum) κέρδος = 3

Η μεγαλύτερη (maximum) τιμή κέρδους από τις δύο ελάχιστες (minimum) τιμές για την εταιρία K συμβολίζεται **maximin** και ισούται με 3.

Αντίστοιχα, η εταιρία L για καθεμία από τις 2 στρατηγικές της p, t, υπολογίζει τη μέγιστη (maximum) ζημιά:

Στρατηγική p: μέγιστη (maximum) ζημιά = 8

Στρατηγική t: μέγιστη (maximum) ζημιά = 3

Η μικρότερη (minimum) τιμή ζημιάς από τις δύο μεγαλύτερες (maximum) για την εταιρία L συμβολίζεται **minimax** και ισούται με 3.

Οι παραπάνω υπολογισμοί παρουσιάζονται στον επαυξημένο Πίνακα 14.3.

		Στρατηγικές L			
		p	t	min	
Στρατηγικές K	P	8	-4	-4	maximin = 3
	T	6	3	3	
max		8	3	V = 3	
		minimax = 3			

Πίνακας 14.3: Κριτήριο maximin minnmax

α) Να απαλειφτούν οι υποδεέστερες στρατηγικές αν υπάρχουν δηλώνοντας παράλληλα τη σειρά των απαλοιφών.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχει στο παίγνιο σημείο ισορροπίας, χρησιμοποιώντας το maximin κριτήριο στον πίνακα πληρωμών που προέκυψε από το α) ερώτημα.

γ) Αν υπάρχει σημείο ισορροπίας να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική και η βέλτιστη τιμή του παίγνιου. Σε αντίθετη περίπτωση, να βρεθεί η βέλτιστη μικτή στρατηγική υπολογίζοντας τις αντίστοιχες πιθανότητες για τις στρατηγικές κάθε παίκτη, καθώς και η αναμενόμενη τιμή του παίγνιου.


11. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

Στρατηγικές		Παίκτης 2		
		B ₁	B ₂	B ₃
Παίκτης 1	A ₁	1	-3	3
	A ₂	3	5	-4
	A ₃	0	-4	2

Πίνακας 14.26

α) Να μετατραπεί σε ισοδύναμο παίγνιο της μορφής $2 \times n$ ή $n \times 2$, απαλείφοντας τυχόν υποδεέστερες στρατηγικές.

β) Να βρεθεί η βέλτιστη μικτή στρατηγική του ισοδύναμου παίγνιου του α) ερωτήματος με τη γραφική μέθοδο.

γ) Να μοντελοποιηθεί το παίγνιο πριν την απαλοιφή των υποδεέστερων στρατηγικών ως ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού και να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex. 

12. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

Κεφάλαιο 15

Μοντέλα Δικτύων (Network models)

A few generations ago, people didn't have a way to share information and express their opinions efficiently to a lot of people. But now they do. Right now, with social networks and other tools on the Internet, all of these 500 million people have a way to say what they're thinking and have their voice be heard.

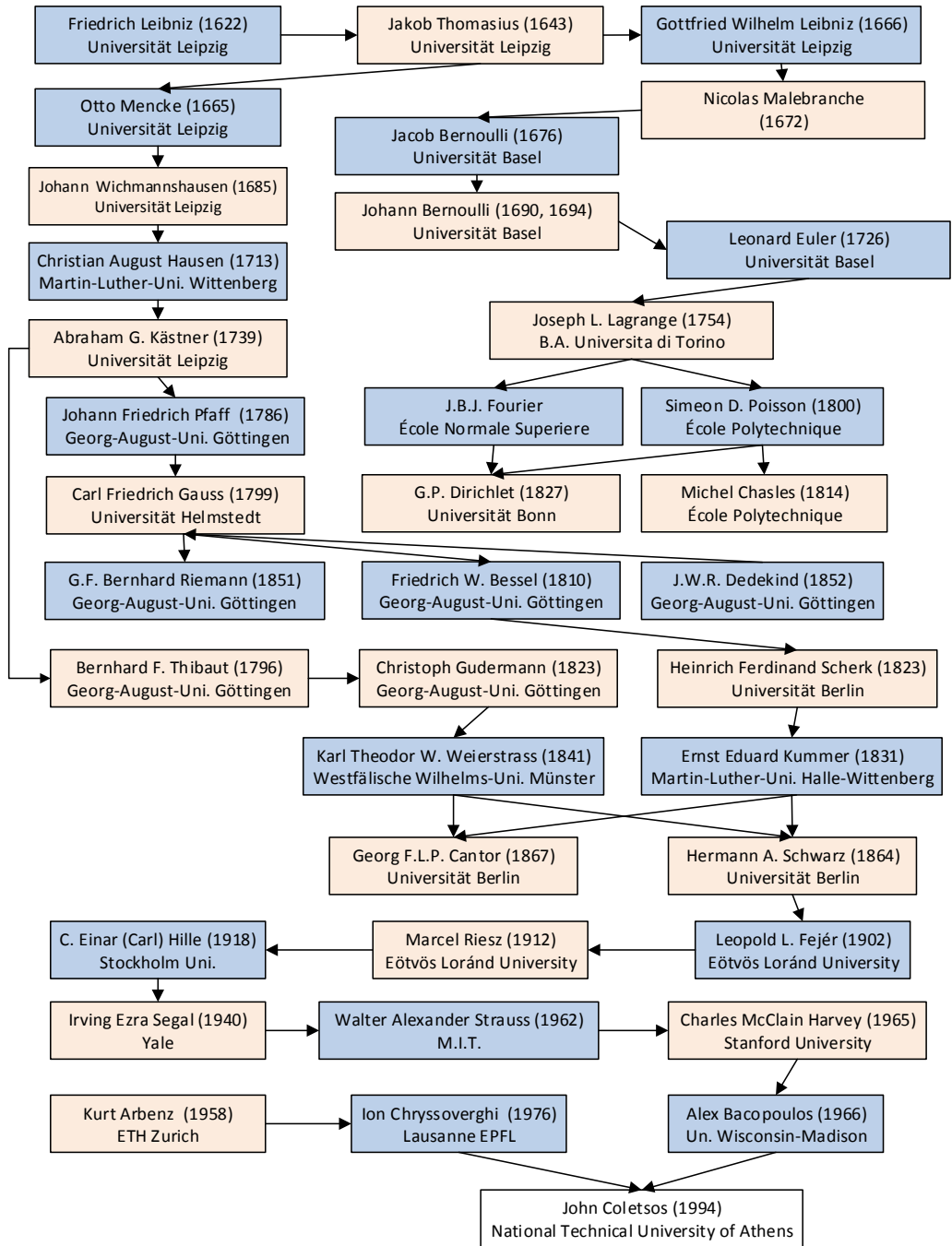
Mark Zuckerberg¹

A journey of a thousand miles begins with a single step.

Confucius²

¹ Αμερικανός προγραμματιστής, επιχειρηματίας, φιλάνθρωπος. Γεννήθηκε το 14 Μαΐου 1984. Είναι συνιδρυτής του Facebook, ενός website κοινωνικής δικτύωσης.

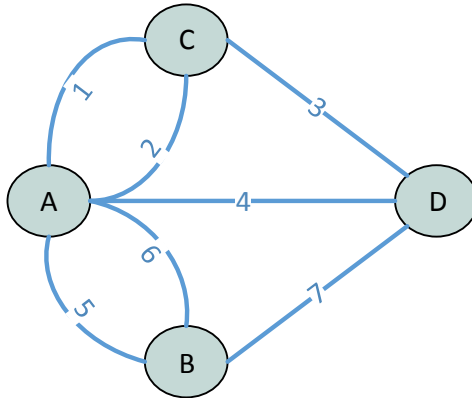
² Κινέζος δάσκαλος, πολιτικός και φιλόσοφος (551 π.Χ – 479 π.Χ).



Εικόνα 15.1: Επιστημονικοί απόγονοι του Leibniz

Εκείνη την εποχή, το παραπάνω πρόβλημα θεωρείτο αδύνατο να απαντηθεί. Η μετάφρασή του στη γλώσσα των δικτύων είναι ότι τα εδάφη παριστάνουν κόμβους και οι γέφυρες ακμές, οπότε το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

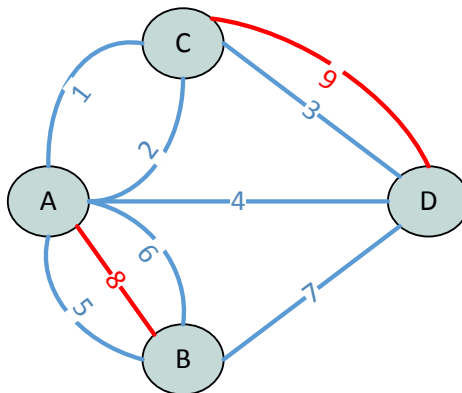
“Να βρεθεί ένας περίπατος που ξεκινώντας από τον κόμβο A, να επιστρέφει σε αυτόν περνώντας από όλες τις ακμές ακριβώς μία φορά.”



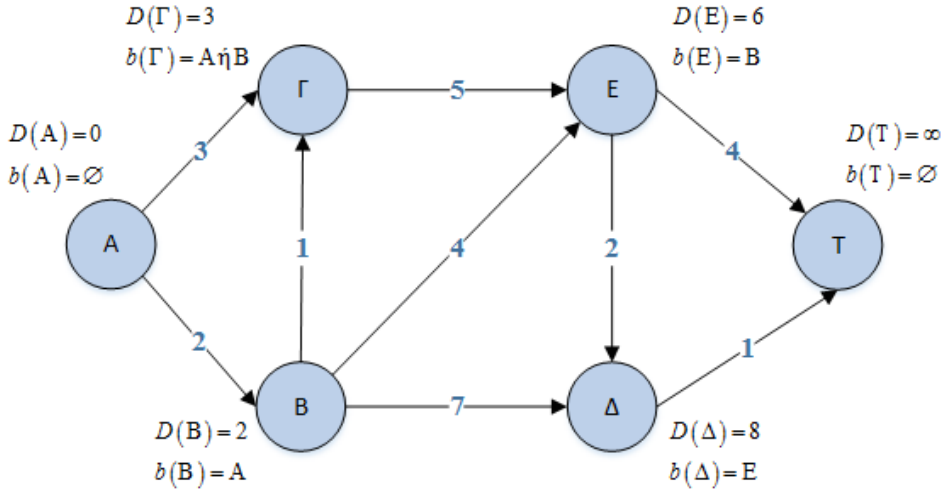
Εικόνα 15.3: Οι επτά γέφυρες του Königsberg σε μορφή δικτύου

Ο Euler απέδειξε ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση, ενώ προσθέτοντας δύο εικονικές γέφυρες (ακμές) μεταξύ των κόμβων A, B και C, D (Εικόνα 15.4) υπάρχουν τέτοιοι περίπατοι, όπως για παράδειγμα:

$A \xrightarrow{(1)} C \xrightarrow{(3)} D \xrightarrow{(7)} B \xrightarrow{(5)} A \xrightarrow{(4)} D \xrightarrow{(9)} C \xrightarrow{(2)} A \xrightarrow{(6)} B \xrightarrow{(8)} A$

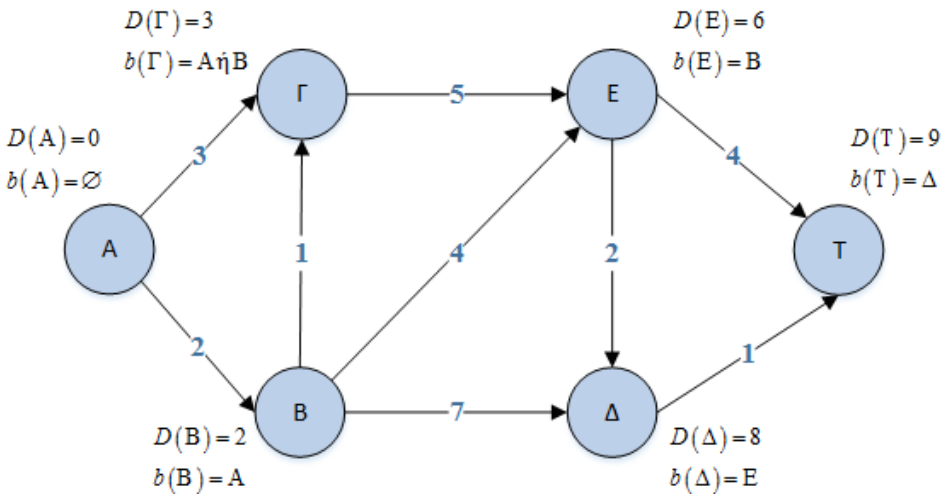


Εικόνα 15.4: Το δίκτυο της πόλης του Königsberg με τις προσθήκες των ακμών 8 και 9



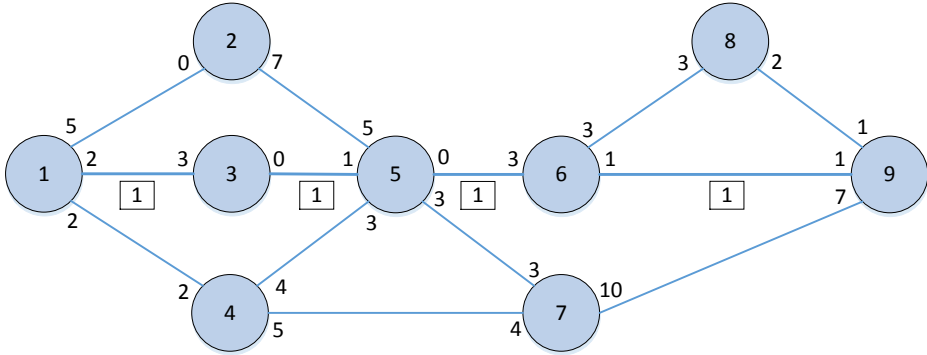
Νέος λυμένος κόμβος είναι ο Δ, οπότε $P = \{A, B, \Gamma, E, \Delta\}$, $D(\Delta) = 8$ και $b(\Delta) = E$.

Βήμα 6: $Temp = \{T\}$, $D(T) = \min\{D(\Delta) + d_{\Delta T}, D(E) + d_{ET}\} = \min\{9, 10\} = 9$,
 $P = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, T\}$, $D(T) = 9$ και $b(T) = \Delta$.



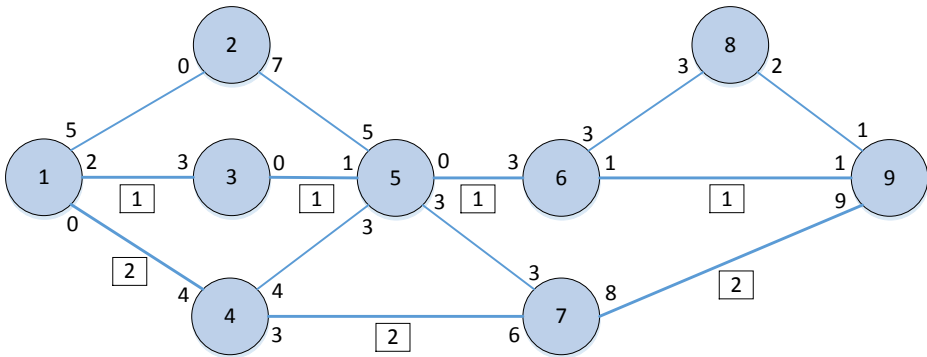
Η συνολική απόσταση του κόμβου τέλους από τον κόμβο αρχής είναι ίση με 9. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται συνοπτικά τα βήματα του αλγόριθμου.

κατεύθυνση του προορισμού κατά 1 μονάδα, ενώ αυξάνεται η δυναμικότητα των ακμών του μονοπατιού προς την κατεύθυνση της αρχής επίσης κατά 1 μονάδα. Έχουμε πλέον το δίκτυο του σχήματος



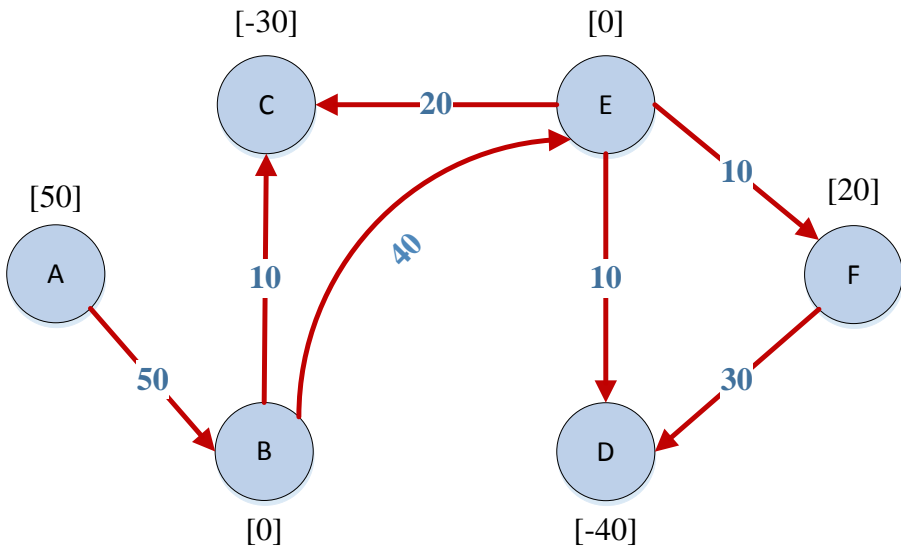
Σχήμα 15.9

Ένα νέο μονοπάτι μη μηδενικής ροής είναι το $1 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{5} 7 \xrightarrow{10} 9$. Η ακμή με τη μικρότερη δυναμικότητα είναι η $1 \xrightarrow{2} 4$ που καθορίζει ότι η ροή του μονοπατιού θα είναι 2 μονάδες. Το δίκτυο γράφεται:



Σχήμα 15.10

Η δυναμικότητα της ακμής $1 \xrightarrow{2} 3$ που είναι πλέον 2 μονάδες δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί η μοναδική επόμενη ακμή $3 \xrightarrow{0} 5$ έχει μηδενική δυναμικότητα. Επίσης, η δυναμικότητα της ακμής $1 \xrightarrow{0} 4$ έχει μηδενιστεί. Επομένως, μπορούμε να έχουμε ροή από την πηγή μόνο μέσω της ακμής



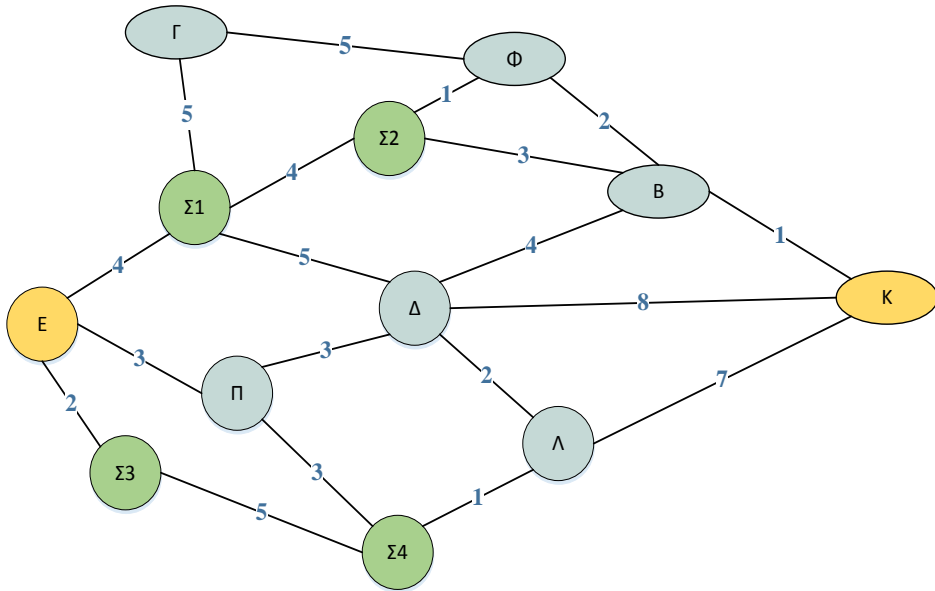
Σχήμα 15.15

15.8 Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου (Minimum Spanning Tree problem)

Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου είναι παραπλήσιο με το πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής, με τη διαφορά ότι ο στόχος είναι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι του δικτύου με τέτοιο τρόπο ώστε το συνολικό μήκος των ακμών να είναι ελάχιστο.

Θεωρούμε ένα μη-κατευθυνόμενο δίκτυο, του οποίου κάθε ακμή είναι εφοδιασμένη με ένα μήκος. Υποθέτουμε ότι το μήκος αυτό είναι μη αρνητικός αριθμός και παριστάνει το μέτρο κάποιου είδους, όπως και στα προηγούμενα προβλήματα. Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου διατυπώνεται ως εξής:

Να βρεθεί εκείνο το ζευγνύον δέντρο που έχει το ελάχιστο συνολικό μήκος διαδρομών.



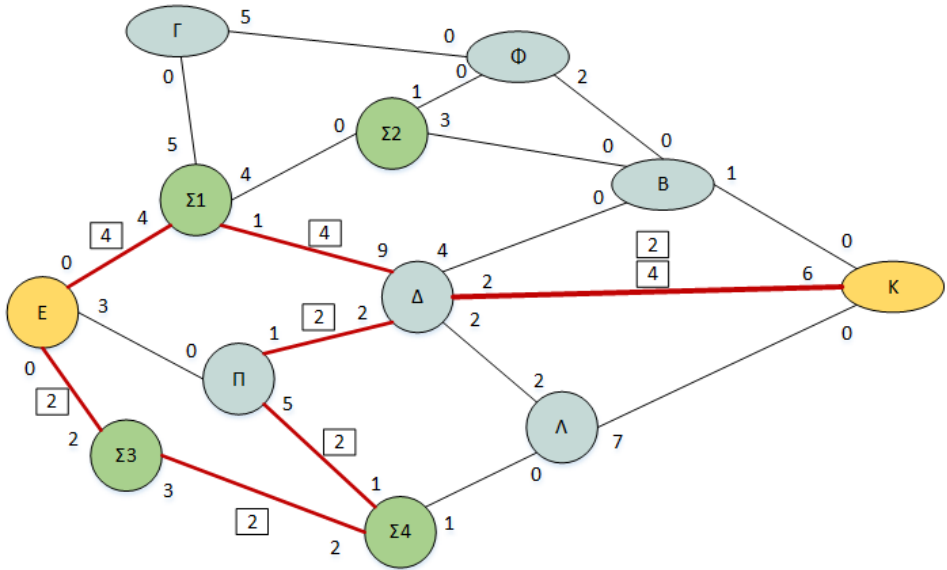
Σχήμα 15.18: Το δίκτυο της Πανεπιστημιούπολης

Οι χρήσεις των κτηρίων και οι συντομογραφίες των ονομάτων τους δίνονται στον Πίνακα 15.2.

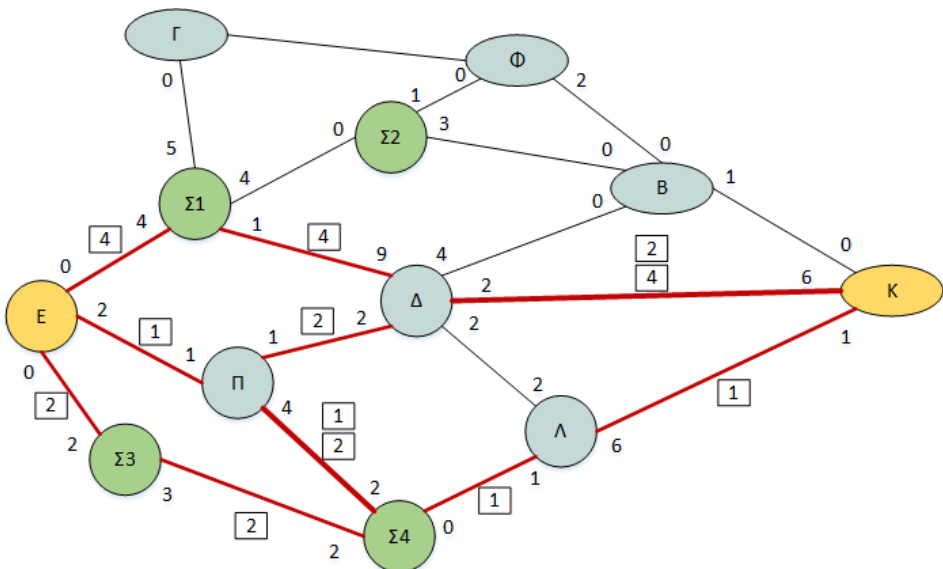
Κόμβος	Σύμβολο
Είσοδος	E
Πρυτανεία	Π
Σχολή 1	Σ1
Σχολή 2	Σ2
Σχολή 3	Σ3
Σχολή 4	Σ4
Κέντρο δικτύων	Δ
Γήπεδο ποδοσφαίρου	Γ
Φοιτητική εστία	Φ
Λέσχη-εστιατόριο	Λ
Βιβλιοθήκη	B
Συνεδριακό κέντρο	K

Πίνακας 15.2: Χρήσεις κτηρίων Πανεπιστημιούπολης

δυναμικότητα του μονοπατιού περιορίζεται από την ακμή με τη μικρότερη δυναμικότητα που είναι η $E \xrightarrow{2} \Sigma_3$.



Ένα νέο μονοπάτι μη μηδενικής ροής από τον κόμβο αρχής στον κόμβο τέλους, είναι το $E \xrightarrow{3} \Pi \xrightarrow{5} \Sigma_4 \xrightarrow{1} \Lambda \xrightarrow{7} K$. Η συνολική δυναμικότητα του μονοπατιού περιορίζεται από την ακμή με τη μικρότερη δυναμικότητα που είναι η $\Sigma_4 \xrightarrow{1} \Lambda$.



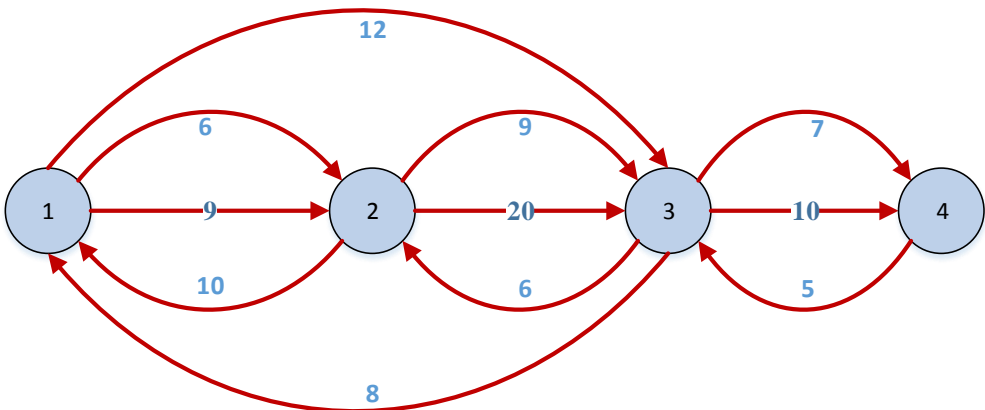
Να εφαρμοστεί η μέθοδος της μέγιστης ροής για τον υπολογισμό της μέγιστης ποσότητας νερού που μπορεί να οδηγηθεί μέσω των αγωγών του σχήματος στον κόμβο εξόδου Κ.

9. Στον πίνακα που ακολουθεί, δίνονται τα κυβικά νερού που παρακρατά ανά ώρα κάθε χωράφι της προηγούμενης άσκησης για τις ανάγκες ύδρευσής του.

A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ
-2	-1	-3	-5	-2	-3	-4	-2

Να εφαρμοστεί μία τροποποίηση της μεθόδου της μέγιστης ροής που να λαμβάνει υπόψη της την παρακράτηση νερού, ώστε να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα που καταλήγει στον κόμβο Κ.

10. Να υπολογιστεί η ελάχιστη διαδρομή για τη μετάβαση από τον κόμβο αρχής 1 στον κόμβο τέλους 4 του παρακάτω δικτύου. Επιπλέον να υπολογιστεί η ελάχιστη διαδρομή οποιουδήποτε άλλου κόμβου προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου.



2^{ος} τρόπος:

		Μέθοδος κοπής											
Πλάτος (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
60	2	1	1	1	1								
50		1				2	2	1	1	1			
30			1	2		1		2	1		4	2	
20	1	1	2	1	4		2	1	3	4	1	4	
Σύνολο	140	130	140	140	140	130	140	130	140	130	140	140	
Ολικό	145	145	145	145	145	145	145	145	145	145	145	145	
Απώλεια	5	15	5	5	5	15	5	15	5	15	5	5	

Αντικειμενική συνάρτηση: Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε τις απώλειες:

$$\min z = 5x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 15x_6 + 5x_7 + 15x_8 + 5x_9 + 15x_{10} + 5x_{11} + 5x_{12}$$

Υπό τους περιορισμούς του πλήθους των παραγγελιών:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 560 \\ 2x_2 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &\geq 320 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + 2x_{12} &\geq 850 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_7 + x_8 + 3x_9 + 4x_{10} + x_{11} + 4x_{12} &\geq 180 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,\dots,12$$

Κατασκευή Δυϊκού προβλήματος

Ορισμός μεταβλητών: Έστω u_1, u_2, \dots, u_7 οι μεταβλητές (όσες και οι εξισώσεις του πρωτεύοντος, περιορισμοί 1-4).

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \text{maximize Profit} = \max P = & 4,000u_1 + 168,000u_2 + 280,000u_3 + \\ & + 1,000u_4 + 2,000u_5 + 500u_6 + 1,000u_7 \end{aligned}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2u_1 + 112u_2 + 168u_3 + u_4 \geq 23.28$$

$$u_1 + 56u_2 + 56u_3 + u_5 \geq 10.8$$

$$3u_1 + 28u_2 + 28u_3 + u_6 \geq 25.4$$

$$2u_1 + 56u_2 + 56u_3 + u_7 \geq 18.8$$

$$u_1, u_2, \dots, u_7 \geq 0$$

Άσκηση 9 (Βιταμίνες), σελίδα 279

Ερώτημα (α):

Βιταμίνες	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	
B ₁	3	2	0	3	1	≥ 30
B ₂	1	4	2	9	1	≥ 27
B ₃	4	6	6	7	5	≥ 33
Κόστος	10	8	9	18	7	

Ορισμός μεταβλητών: Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τα γραμμάρια τροφής ανά ημέρα.

Αντικειμενική συνάρτηση: Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος αγοράς των τροφίμων:

$$\min C = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 18x_4 + 7x_5$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 \geq 30 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 \geq 27 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 \geq 33 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{περιορισμοί ελάχιστης} \\ \text{ποσότητας βιταμινών} \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad \text{περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

Ερώτημα (β) (Δυϊκό):

Προφανώς, το πρόβλημα της φαρμακοβιομηχανίας μοντελοποιείται σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, **δυϊκό** του προηγούμενου προβλήματος. Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος προκύπτει από την απαίτηση να καθορίσουμε την τιμή πώλησης για κάθε μονάδα βιταμίνης B_1, B_2, B_3 , ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της φαρμακοβιομηχανίας. Οι περιορισμοί του δυϊκού προβλήματος προκύπτουν από το γεγονός ότι προκειμένου ο καταναλωτής να δεχτεί να επιλέξει την πρόσληψη των απαραίτητων βιταμινών μέσω της αγοράς χαπιών, πρέπει το κόστος τους να μην υπερβαίνει το κόστος των αντίστοιχων ποσοτήτων τροφών που έχουν ισοδύναμο αποτέλεσμα. Η μαθηματική μοντελοποίηση του δυϊκού προβλήματος είναι η ακόλουθη:

Ορισμός μεταβλητών: Έστω w_1, w_2, w_3 η τιμή πώλησης ανά μονάδα βιταμίνης B_1, B_2, B_3 αντίστοιχα.

αργότερη εβδομάδα έναρξης του i -έργου (late start) και υποδεικνύει τα δεύτερα μέλη των περιορισμών.

Στον πίνακα 16.3, παρουσιάζεται στη στήλη C η συνολική διάρκεια του κάθε έργου. Στα κελιά E3:P9 οι μεταβλητές Y_{ij} , $i=1,2,\dots,7$, $j=1,2,\dots,12$, φανερώνουν εάν το i -έργο εκτελείται την j -εβδομάδα. Στα κελιά E10:P10 περιέχονται οι τιμές μεταβλητών W_j , $j=1,2,\dots,12$, με το σύνολο των λογιστών που απασχολούνται τη j -εβδομάδα. Τέλος, στο κελί Q10 βρίσκεται η λύση που προτείνει ο Solver με τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό υπαλλήλων.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Εβδομάδες εκτέλεσης έργων																
2	Έργο	t(i)	c(i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
3	1	A	3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
4	2	B	1	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
5	3	C	5	2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	
6	4	D	4	3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	5	E	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	6	F	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
9	7	G	5	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	
10	Σύνολο				5	5	6	6	3	3	6	6	6	6	4	4	6

Πίνακας 16.3

Ερώτημα (ε):

Στον πίνακα 16.4 δίνεται μία γραφική αναπαράσταση των διάφορων έργων με την εβδομάδα εκτέλεσης του καθενός.

Εβδομάδες εκτέλεσης έργων											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E	E	A	A	A		B	G	G	G	G	G
E	E	A	A	A		B	G	G	G	G	G
		A	A	A		B	G	G	G	G	G
D	D	D	D		F	F	G	G	G	G	G
D	D	D	D		C	C	C	C	C		
D	D	D	D		C	C	C	C	C		

Πίνακας 16.4

Παρατήρηση: Η ευρεθείσα λύση δίνει βέλτιστο αριθμό λογιστών. Δεν είναι όμως μοναδική, όπως φαίνεται και στον πίνακα 16.5.

Εβδομάδες εκτέλεσης έργων											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	C	C	C	C	C	B		A	A	A	
	C	C	C	C	C	B		A	A	A	
	G	G	G	G	G	B		A	A	A	
	G	G	G	G	G	E	E	D	D	D	D
	G	G	G	G	G	E	E	D	D	D	D
	G	G	G	G	G	F	F	D	D	D	D

Πίνακας 16.5

Στο γράφημα του πίνακα 16.6 δίνεται μία λύση, στην οποία ενώ επιτυγχάνεται ο βέλτιστος αριθμός λογιστών, το σύνολο των έργων ολοκληρώνεται στον ελάχιστο αριθμό των 10 εβδομάδων. Θα μπορούσε να πει κανείς, ότι έχουμε σύγχρονη βελτιστοποίηση του πλήθους των λογιστών και του ελάχιστου χρόνου για την ολοκλήρωση των έργων.

Εβδομάδες εκτέλεσης έργων											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E	E	A	A	A	G	G	G	G	G		
E	E	A	A	A	G	G	G	G	G		
F	F	A	A	A	G	G	G	G	G		
D	D	D	D	B	G	G	G	G	G		
D	D	D	D	B	C	C	C	C	C		
D	D	D	D	B	C	C	C	C	C		

Πίνακας 16.6

α) Εφαρμόζοντας την τεχνική maximin-minimax στον πίνακα πληρωμών, διαπιστώνουμε ότι η βέλτιστη στρατηγική για την εταιρία 1 είναι αυτή των προσφορών (O), ενώ για την εταιρία 2 η μείωση των τιμών (P), που οδηγούν σε βέλτιστη τιμή 6, δηλαδή από τις αναμενόμενες πωλήσεις 10 χιλιάδων νέων μονάδων, 6,000 θα πραγματοποιήσει η εταιρία 1 και τις υπόλοιπες 4,000 η εταιρία 2.

		Εταιρία 2			min	
		o	a	p		
Εταιρία 1	O	7	8	6	6	maximin = 6
	A	6	9	5	5	
	P	8	3	4	3	
max		8	9	6	V = 6	
		minimax = 6				

β) Η εταιρία 2 διαγράφει τη στρατηγική της “o” γιατί είναι υποδεέστερη της “p”. Στη συνέχεια, η εταιρία 1 διαγράφει τη στρατηγική της “P” γιατί είναι υποδεέστερη της “O”.

Στρατηγικές		Εταιρία 2		
		o	a	p
Εταιρία 1	O	7	8	6
	A	6	9	5
	P	8	3	4

Συνεπώς, ο πίνακας πληρωμών που απομένει χωρίς να περιέχει καμία υποδεέστερη στρατηγική είναι: