Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορική αναδρομή

Από την εμφάνιση της βιομηχανικής επανάστασης (19ος αιώνας) μέχρι σήμερα παρατηρείται μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη στο μέγεθος και την πολυπλοκότητα των επιχειρήσεων και των οργανισμών. Οι μικρές επιχειρήσεις βαθμιαία εξελίχθηκαν σε εταιρίες συγκέντρωσης μεγάλων κεφαλαίων. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο των επαναστατικών αλλαγών αυξήθηκε εντυπωσιακά ο καταμερισμός των ευθυνών και η κατανομή της εργασίας μέσα στις επιχειρήσεις. Όμως, η αύξηση της εξειδίκευσης δημιούργησε καινούρια προβλήματα, τα οποία απασχολούν τις επιχειρήσεις και τους οργανισμούς μέχρι σήμερα. Για παράδειγμα, οι εξειδικευμένοι εργάτες, υπάλληλοι και επιστήμονες είχαν βαθιά γνώση του αντικειμένου με το οποίο ασχολούνταν, αλλά ελάχιστη γνώση της εργασίας των άλλων ειδικοτήτων και του τρόπου με τον οποίο οι δραστηριότητες και οι στόχοι τους συνδέονταν με τον κύριο οργανισμό. Επίσης οι στόχοι και οι επιδιώξεις τους πολλές φορές έρχονταν σε αντίθεση με τους στόχους και τις επιδιώξεις των άλλων ειδικοτήτων. Τέλος, η κατανομή των διαθέσιμων πόρων στις διάφορες δραστηριότητες έγινε αρκετά δύσκολη. Δημιουργήθηκε λοιπόν η ανάγκη μιας επιστήμης η οποία όχι μόνο να έχει ως αντικείμενο την εύρεση του καλύτερου δυνατού τρόπου επίλυσης αυτών και άλλων παρόμοιων προβλημάτων, αλλά ταυτόχρονα να ικανοποιεί την προσπάθεια μας να προσεγγίσουμε επιστημονικά την διοίκηση των οργανισμών. Παρουσιάστηκε δηλαδή η ανάγκη δημιουργίας της επιστήμης της **Επιχειρησιακής Έρευνας**.

Το **1940** θεωρείται ως έτος γέννησης του νέου επιστημονικού κλάδου, όμως οι ρίζες της νέας αυτής επιστήμης της Ε.Ε. μπορούν να αναζητηθούν πολύ πριν. Το πρώτο βήμα στον τομέα είχε γίνει από τον Charles Babbage (1791-1871). Χαρακτηρίστηκε ως ο "πατέρας της επιχειρησιακής έρευνας", επειδή η έρευνά του για το κόστος μεταφοράς και το κόστος για την ταξινόμηση της αλληλογραφίας οδήγησε στη δημιουργία του γενικού αγγλικού "Ταχυδρομείου της πένας" το 1840. Το 1917 ο Agner Krarup Erlang (1878-1929) μελετούσε προβλήματα σχετικά με το χρόνο απασχόλησης των τηλεφωνικών κέντρων, και το 1920 ο Horace Clifford Levinson ασχολήθηκε με τη μελέτη προβλημάτων πωλήσεων και εμπορίου. Γιατί όμως αυτή η χρονολογία (1940) θεωρείται ως επίσημη αρχή του κλάδου; Τι συνέβη εκείνη την εποχή που προκάλεσε τη γέννηση της

επιχειρησιακής έρευνας; Η έκρηξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, το Σεπτέμβριο του 1939, συντάραξε την ανθρωπότητα. Για την τελική έκβαση του πολέμου επιστρατεύθηκαν όλες οι διαθέσιμες δυνάμεις της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων και επιστημόνων, όπως μαθηματικών, φυσικών, στατιστικών, βιολόγων, ψυχιάτρων κ.α. Έτσι λοιπόν, στο Ηνωμένο Βασίλειο επιστήμονες όπως οι Patrick M.S. Blackett[1] (1897-1974), Jonathan Vivian Rosenhead[2] (1938-), Conrad Hal Waddington (1905-1975), Owen Wansbrough-Jones (1906-1983) και Frank Yates (1902-1994), αλλά και στις Ηνωμένες Πολιτείες ο George Dantzig (1914-2005) έψαχναν τρόπους ώστε να λαμβάνουν καλύτερες αποφάσεις σε περιοχές όπως τα προγράμματα διοικητικής μέριμνας και τα προγράμματα εκπαίδευσης.

Ειδικότερα, οι διοικητές των ενόπλων δυνάμεων της Μεγάλης Βρετανίας χρειάζονταν βοήθεια για τη μελέτη της νέας (για την εποχή εκείνη) τεχνολογίας των ραντάρ και την εξεύρεση των πιο αποτελεσματικών μεθόδων για τον εντοπισμό εχθρικών αεροσκαφών. Έτσι, το Υπουργείο British Air ίδρυσε το ερευνητικό κέντρο Bawdsey Manor Research Station στο Suffolk με διευθυντή του κέντρου για τα πρώτα χρόνια τον Robert Watson-Watt (1892-1973) (ως τότε υπεύθυνο του τμήματος ραδιοκυμάτων του Βρετανικού Εθνικού Εργαστηρίου) και στη συνέχεια τον Albert P. Rowe (1873-1948). Τα αποτελέσματα των 3 πρώτων επίσημων ασκήσεων με χρήση ραντάρ ήταν θετικά στην έγκαιρη προειδοποίηση, αλλά απογοητευτικά στις πληροφορίες εντοπισμού (tracking information) μετά το φιλτράρισμα και τη μετάδοση των στοιχείων από το δίκτυο. Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε καινούρια άσκηση και προστέθηκαν τέσσερις σταθμοί ραντάρ, όμως δημιουργήθηκε νέο πρόβλημα, αυτό του συντονισμού και συνδυασμού συχνά αντικρουόμενων πληροφοριών από τους διαφορετικούς σταθμούς. Ενώ τεχνικά τα συστήματα ραντάρ λειτουργούσαν αποτελεσματικά, υπήρχε πρόβλημα στο λειτουργικό (operational) κομμάτι, οπότε αποφασίστηκε έρευνα (research) προς αυτήν την κατεύθυνση. Εν όψει πολέμου κάτι δραστικό έπρεπε να συμβεί. Έτσι λοιπόν, το 1939 ιδρύεται το Stanmore Research Section (SRS) και το 1941 το Operational Research Section της RAF (Royal Air Force), των οποίων οι αποφάσεις αποδείχτηκαν ιδιαίτερης σημασίας για την επιτυχημένη αναχαίτιση των Γερμανών στη μάχη της Βρετανίας[3].

Στην άλλη μεριά του Ατλαντικού ο P.M.S. Blackett, το 1942, συνέταξε ένα σχέδιο για τη δημιουργία του U.S. Navy Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG). Οι εργασίες αυτής της ομάδας (που την αποκαλούσαν Blackett's Circus) έφεραν σημαντικά αποτελέσματα με κυριότερο αυτό του προσδιορισμού του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών (πλήθος φορτηγών πλοίων συνοδευόμενων από πολεμικά). Η αύξηση του μεγέθους των νηοπομπών καθόρισε τη νίκη στη μάχη του Ατλαντικού. Τον Οκτώβριο του 1942, η πρώτη ομάδα Επιχειρησιακών Ερευνητών από τις ΗΠΑ φτάνει στη Βρετανία για να συνεργαστεί με την 8η Μονάδα Βομβαρδιστικών. Στόχος τους ήταν η βελτιστοποίηση της ακρίβειας πλήξης στόχων. Η ομάδα βασισμένη σε μελέτη των προτύπων ρίψης βομβών και ύστερα από επιτόπου παρατήρηση πρότεινε τα εξής:

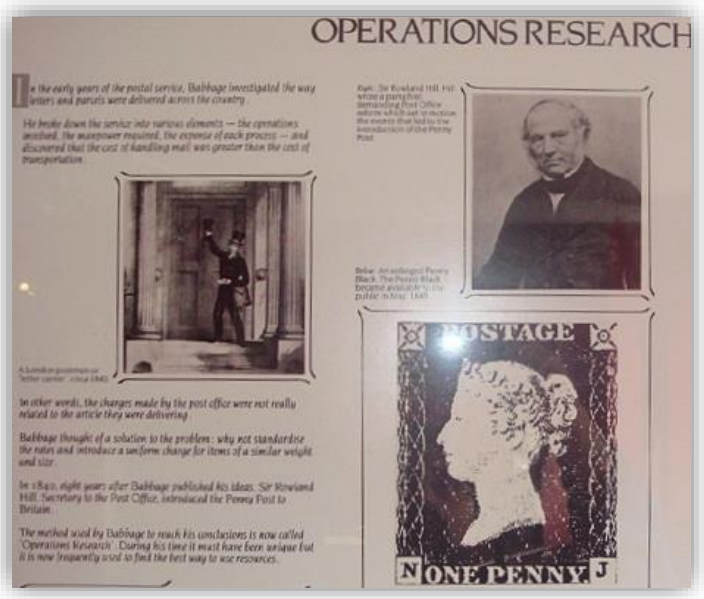
[1] Patrick Maynard Stuart Blackett, Nobel prize στη Φυσική το 1948, ενώ προς τιμήν του ονομάστηκε ένας κρατήρας "crater Blackett" στην επιφάνεια της Σελήνης.
[2] 1986-87, President of the Operational Research Society.
[3] Sottinen, T. (2009). Operations Research, Lecture notes.

i) το πιο αποτελεσματικό πλήρωμα να ρίχνει πρώτο τις βόμβες του

ii) όλες οι βόμβες να ρίχνονται ταυτόχρονα (in salvo)

iii) τα αεροσκάφη να πετούν σε σχηματισμούς ακριβείας μειώνοντας με αυτόν τον τρόπο τη μεγάλη διασπορά των βομβών.

Η εφαρμογή των παραπάνω προτάσεων είχε σαν αποτέλεσμα τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας πλήξης στόχων κατά 1000%. Η νίκη της μάχης του Ατλαντικού και της μάχης της Βρετανίας ήταν μόνο δύο από τις σημαντικές εφαρμογές της επιχειρησιακής έρευνας κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκοσμίου πολέμου.



Εικόνα 1.1: Μέρος αφίσας για τον Charles Babbage και τη συμβολή του στην επιχειρησιακή έρευνα, δωμάτιο Babbage του μουσείου Totnes, (Αγγλία), Ιούλιος 2007.

Μετά τον πόλεμο, η ανάγκη για την καλύτερη δυνατή αξιοποίηση των περιορισμένων διαθέσιμων πόρων ήταν φανερή. Παράλληλα, η ξαφνική και γρήγορη βιομηχανική ανάπτυξη δημιούργησε αρκετά προβλήματα λόγω της αυξανόμενης πολυπλοκότητας των οργανισμών και της εξειδίκευσης. Οι επιστήμονες και οι ερευνητές της επιχειρησιακής έρευνας που είχαν εργαστεί σε αυτόν τον τομέα κατά τη διάρκεια του πολέμου δεν άργησαν να αντιληφθούν ότι τα προβλήματα αυτά είχαν την ίδια βάση με αυτά που αντιμετώπισαν στο στρατό. Έτσι, η βιομηχανία παρακινούμενη από τη φανερή επιτυχία της επιχειρησιακής έρευνας στο στρατιωτικό τομέα άρχισε να ενδιαφέρεται για το νέο αυτό κλάδο. Στην Αμερική ιδρύθηκε το Operations Evaluation Group (OEG) σε συνεργασία με το MIT (Massachusetts Institute of Technology) και υπογράφηκε σύμβαση με την Douglas Aircraft Company για το έργο RAND (Research and Development), το οποίο στην ουσία παρέτεινε το έργο των ερευνητών επιχειρησιακής έρευνας για σημαντικό χρονικό διάστημα μετά τη λήξη του πολέμου. Μέχρι το 1951 η επιχειρησιακή έρευνα είχε επικρατήσει στη Μεγάλη Βρετανία και το 1957 ιδρύεται η Διεθνής Συνομοσπονδία Εταιρειών Επιχειρησιακών Ερευνών, ονομαζόμενη διεθνώς “IFORS” (International Federation of Operations Research Societies). Δεδομένου ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα γεννήθηκε κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο και αναπτύχθηκε διεθνώς τη δεκαετία του 1960, η εμφάνισή της

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

2.1 Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας

Συνοπτικά, θα μπορούσαμε να πούμε πως η επιχειρησιακή έρευνα ασχολείται με την άριστη λήψη αποφάσεων σε προσδιοριστικά και πιθανολογικά συστήματα που προκύπτουν μέσα από πραγματικά προβλήματα. Διακρίνοντας τα προβλήματα αυτά ως προς το περιεχόμενο τους παραθέτουμε μερικά παραδείγματα.

Βιομηχανία-Παραγωγή

Χωροθέτηση εργοστασίου, προγραμματισμός προμηθειών ή παραγωγής, έλεγχος αποθεμάτων πρώτων υλών ή προϊόντων, έλεγχος ποιότητας, ανανέωση μηχανολογικού εξοπλισμού, ανάλυση αξιοπιστίας, εξισορρόπηση γραμμής παραγωγής.

Εμπόριο

Καθορισμός βέλτιστης σύνθεσης παραγωγής, βέλτιστη στρατηγική διαφημίσεως και τιμολογήσεως προϊόντων, προγραμματισμός πωλήσεων, προγραμματισμός μεταφοράς και διανομής προϊόντων, προσδιορισμός θέσεως και αριθμού αποθηκών, σύνθεση μεταφορικού στόλου.

Οικονομικά

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός, καθορισμός πιστωτικής πολιτικής, προϋπολογισμός, βελτιστοποίηση χρηματοροών.

Προσωπικό

Ανάλυση & αξιολόγηση προσωπικού, προγραμματισμός προσωπικού, ανάλυση αιτιών απουσίας, πρόληψη ατυχημάτων. Προβλήματα σαν κι αυτά όμως απασχολούν τους περισσοτέρους οργανισμούς, μεταξύ των οποίων τις εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις. Συνεπώς, τόσο οι μεγάλες εταιρείες όσο και πολλοί από

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$max\, z = 60{,}000x_1 + 75{,}000x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{lcl} 20x_1 + 12x_2 & \leq & 180 \\ x_1 & \geq & 5 \\ x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Παράδειγμα 2.4: Το πρόβλημα της δίαιτας (Diet problem)

Μία βιομηχανία παραγωγής ζωοτροφών πρέπει να παραδώσει σε κάποιον πελάτη της μία ποσότητα ζωοτροφής με περιεκτικότητα τουλάχιστον 25% σε πρωτεΐνες και το πολύ 10% σε λιπαρά. Το κόστος και η περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και σε λιπαρά των χρησιμοποιούμενων από τη βιομηχανία πρώτων υλών παρουσιάζονται στον πίνακα 2.2. Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους των πρώτων υλών για την παραγωγή ζωοτροφής με την επιθυμητή περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και λιπαρά.

Θρεπτικά Συστατικά	**Περιεκτικότητα (%) των πρώτων υλών σε θρεπτικά συστατικά**				**Επιθυμητή περιεκτικότητα (%)**
	Κριθάρι	**Βρώμη**	**Σουσάμι**	**Καλαμποκάλευρο**	
Πρωτεΐνες	5	10	45	30	τουλάχιστον 25
Λιπαρά	4	10	18	8	το πολύ 10
Κόστος πρώτων υλών (€ ανά τόνο)	600	700	900	800	

Πίνακας 2.2: Περιεκτικότητες και κόστη ανά πρώτη ύλη

Ορισμός μεταβλητών:

Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 οι ποσότητες σε μέρη του τόνου κριθαριού, βρώμης, σουσαμιού και καλαμποκάλευρου αντίστοιχα, οι οποίες θα περιέχονται σε ένα τόνο ζωοτροφής, ο οποίος πληροί τις διατροφικές απαιτήσεις (π.χ. $x_1 = 0.3$ σημαίνει ότι για την παρασκευή ενός τόνου ζωοτροφής χρησιμοποιούνται 300kg κριθάρι).

Αντικειμενική συνάρτηση:

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους για την παραγωγή ενός τόνου ζωοτροφής,

$$min\, z = 600x_1 + 700x_2 + 900x_3 + 800x_4$$

Περιορισμοί:

Το άθροισμα των ποσοτήτων x_1, x_2, x_3 και x_4 πρέπει να είναι ίσο με ένα τόνο, δηλαδή,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

σε **χιλιάδες κιβώτια** είναι 150 για το Ηράκλειο, 700 για το Κερατσίνι, 250 για το Βόλο και 500 για τη Θεσσαλονίκη. Τα παραπάνω, καθώς και το κόστος σε € της αποστολής κάθε χιλιάδας κιβωτίων από κάθε εργοστάσιο σε κάθε κεντρική αποθήκη φαίνονται στον πίνακα 2.5.

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				ΠΡΟΣΦΟΡΑ
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
ΖΗΤΗΣΗ		150	700	250	500	**1600**

Πίνακας 2.5: Κόστη μεταφοράς

Η μαθηματική μοντελοποίηση του ανωτέρω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού δίνεται ως εξής:

Ορισμός μεταβλητών:

Έστω $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$ οι ποσότητες αποστολής (σε χιλιάδες κιβώτια) από κάθε εργοστάσιο ($i = 1,2,3$) σε κάθε κεντρική αποθήκη ($j = 1,2,3,4$) ανά εβδομάδα.

Αντικειμενική συνάρτηση:

Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς των κιβωτίων από τα εργοστάσια στις αποθήκες

$$minimize\ cost\ C = min\ C = 540x_{11} + 420x_{12} + 340x_{13} + 160x_{14}$$
$$+180x_{21} + 80x_{22} + 240x_{23} + 300x_{24} + 120x_{31} + 300x_{32} + 500x_{33} + 440x_{34}$$

Υπό τους περιορισμούς:

Περιορισμοί διαθεσιμότητας

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 850$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 350$$

Περιορισμοί ζήτησης

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 150$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 700$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 250$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 500$$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας

$$x_{ij} \geq 0,\ \text{για}\ i = 1,\ 2,\ 3\ \text{και}\ j = 1,\ 2,\ 3,4$$

Ορισμός μεταβλητών:

$x_i, i = 1,2, \dots ,6$ οι αεροσυνοδοί που προσλαμβάνονται τον μήνα i.

$y_i, i = 1,2, \dots ,6$ οι εκπαιδευμένες αεροσυνοδοί που εργάζονται τον μήνα i.

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$min\, z = 800 \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i + 1500 \cdot \sum_{i=1}^{6} y_i$$

Περιορισμοί:

Μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός προσλήψεων τον μήνα *i*:

$$x_i \leq 50, \qquad i = 1, \dots ,6.$$

Εκπαιδευμένες αεροσυνοδοί που εργάζονται τον 1ο μήνα:

$$y_1 = 70$$

Εκπαιδευμένες αεροσυνοδοί που εργάζονται τον *i* μήνα:

$$y_i = 0.9 \cdot y_{i-1}, \qquad i = 2, \dots ,6$$

Κάθε μήνα εργάζεται το 90% των αεροσυνοδών του προηγούμενου μήνα, αφού σύμφωνα με την υπόθεση το υπόλοιπο 10% παραιτείται. Στον παραπάνω περιορισμό χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση «ακέραιο μέρος» δεδομένου ότι το πλήθος των αεροσυνοδών οφείλει να είναι ακέραιος αριθμός.

Κάλυψη των απαιτούμενων ωρών εργασίας τον *i* μήνα:

$$150 \cdot y_i \geq d_i, \qquad i = 1, \dots ,6.$$

2.3.4 Τοποθέτηση μαθητών σε σχολεία

Η πόλη Gotham έχει τρία σχολεία που καλύπτουν τις ανάγκες πέντε συνοικιών. Η χωρητικότητα των σχολείων δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Σχολεία	Χωρητικότητα
A	**400**
B	**300**
C	**200**
Σύνολο	900

Πίνακας 2.10

Κεφάλαιο 3

Μαθηματικό υπόβαθρο για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

3.1 Προβλήματα βελτιστοποίησης και πολυπλοκότητα αλγορίθμων

Στο κεφάλαιο 2.2 παρουσιάσαμε παραδείγματα προβλημάτων στα οποία η μοντελοποίηση έγινε με τις μεθόδους της Επιχειρησιακής Έρευνας. Τα μαθηματικά μοντέλα σε αυτές τις περιπτώσεις περιέχουν:

1. Τις **μεταβλητές απόφασης** (decision variables), οι οποίες ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που πρέπει να υπολογίσουμε και θα αποτελέσουν τη λύση του προβλήματος μας.

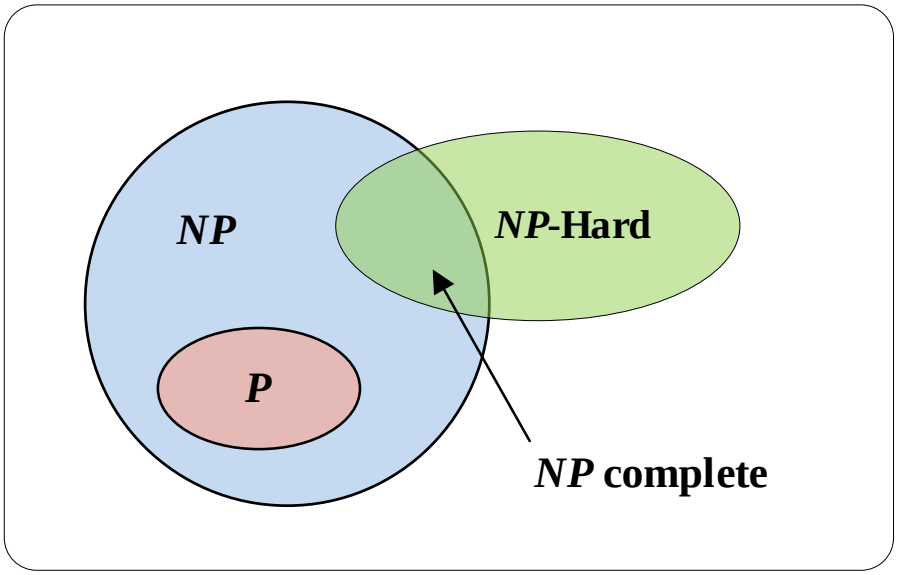
   Στα προβλήματα των επιχειρήσεων, τα οποία καλούνται να επιλύσουν οι επιστήμονες της επιχειρησιακής έρευνας, συχνά ο ορισμός των μεταβλητών απόφασης είναι ιδιαίτερα δύσκολος, ειδικά αν οι επιχειρήσεις διατυπώνουν το πρόβλημά τους με ασαφή και συγκεχυμένο τρόπο. Τολμούμε να πούμε ότι ο κακός ορισμός των μεταβλητών απόφασης, είναι ο συχνότερος λόγος που η επίλυση ενός προβλήματος οδηγεί σε λύση που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.
2. Την **αντικειμενική συνάρτηση** (objective function) που προσπαθεί να εκφράσει με ένα μετρήσιμο τρόπο το στόχο - επιδίωξη του προβλήματος και τελικά βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) το κριτήριο απόδοσης που θέτουμε.
3. Τους **περιορισμούς** (constraints) που είναι εξισώσεις ή ανισώσεις και αντιστοιχούν στους περιορισμούς του φυσικού προβλήματος.

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα με n μεταβλητές απόφασης $x_1, x_2, \dots, x_n$ και συντελεστές βαρύτητας κάθε μεταβλητής στο κριτήριο απόδοσης $c_1, c_2, \dots, c_n$ αντίστοιχα. Από τη μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος μας προκύπτει η ακόλουθη γενική μορφή:

Βελτιστοποιήστε (μεγιστοποιείστε ή ελαχιστοποιήστε) την **αντικειμενική συνάρτηση**

$$\text{optimize } z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ένα πρόβλημα είναι *NP*-complete, αρκεί να δείξουμε ότι είναι *NP* και στη συνέχεια να μετασχηματίσουμε κάποιο γνωστό *NP*-complete πρόβλημα σε αυτό. Ενδεικτικά, αναφέρουμε κάποια γνωστά *NP*-complete προβλήματα: το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Travelling Salesman Problem-*TSP*), ο χρωματισμός γραφήματος με 3 χρώματα, το πρόβλημα του σακιδίου (Knapsack Problem), κ.τ.λ.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα των κλάσεων πολυπλοκότητας με την προϋπόθεση πως $P \neq NP$

Εάν μπορούσαμε να ανακαλύψουμε έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο για το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή, τότε θα είχαμε βρει έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για όλα τα προβλήματα της κλάσης *NP* και θα ίσχυε $P = NP$. Επειδή όμως κανείς, ποτέ δεν κατάφερε να βρει έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο για οποιοδήποτε *NP*-complete πρόβλημα, πιστεύεται ότι $P \neq NP$. Τέλος, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης θα λέμε ότι είναι ***NP*-Hard**, αν το αντίστοιχο πρόβλημα ύπαρξης είναι *NP*-complete[1].

3.2 Το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η ακόλουθη:

Αντικειμενική συνάρτηση:

Να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{optimize } z = f(\boldsymbol{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \{\leq, =, \geq\} & b_m \end{array}$$

[1] Χαλάτσης, Κ. (2000). Εισαγωγή στη σύγχρονη επιστήμη των υπολογιστών, εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα.

- Το γινόμενο δύο διαμερισμένων πινάκων παράγεται ύστερα από πράξεις μόνο μεταξύ των υποπινάκων: Δεδομένου ενός $k \times p$ πίνακα $\boldsymbol{P}$, με m διαμερίσεις γραμμών και n διαμερίσεις στηλών,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & & P_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mn} \end{bmatrix},$$

και δεδομένου ενός $p \times r$ πίνακα $\boldsymbol{Q}$, με n διαμερίσεις γραμμών και q διαμερίσεις στηλών,

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1q} \\ Q_{21} & Q_{22} & & Q_{2q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nq} \end{bmatrix},$$

το γινόμενο $\boldsymbol{C}$ των πινάκων $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}$ παράγεται κατά blocks, θεωρώντας τον $\boldsymbol{C}$ ως ένα $k \times r$ πίνακα με m διαμερίσεις γραμμών και q διαμερίσεις στηλών. Οι καινούργιοι υποπίνακες (blocks) - στοιχεία του $\boldsymbol{C}$ υπολογίζονται από τα αθροίσματα:

$$\boldsymbol{C_{il}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P_{ij} Q_{jl}}, \quad \text{με } i = 1,2,\dots,m,\ l = 1,2,\dots,q.$$

- Έστω ένας ομαλός $n \times n$ πίνακας $\boldsymbol{M}$, ο οποίος έχει διαμεριστεί σύμφωνα με τη σχέση:

$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{k\times k} & \boldsymbol{B}_{k\times m} \\ \boldsymbol{C}_{m\times k} & \boldsymbol{D}_{m\times m} \end{bmatrix}_{(k+m)\times(k+m)}$, όπου $\boldsymbol{A}_{k\times k}$, $\boldsymbol{B}_{k\times m}$, $\boldsymbol{C}_{m\times k}$ και $\boldsymbol{D}_{m\times m}$ πίνακες, με $n = k + m$. Τότε ο $\boldsymbol{M}^{-1}$ υπάρχει και μάλιστα θα είναι διαμερισμένος με τον ίδιο τρόπο όπως ο $\mathbf{M}$, δηλαδή, $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{B_1} \\ \boldsymbol{C_1} & \boldsymbol{D_1} \end{bmatrix}$, όπου $\boldsymbol{A_1}$ πίνακας $k \times k$, $\boldsymbol{B_1}$ πίνακας $k \times m$, $\boldsymbol{C_1}$ πίνακας $m \times k$ και $\boldsymbol{D_1}$ πίνακας $m \times m$. Αν υποθέσουμε πως ο $\boldsymbol{D}$ έχει αντίστροφο και πως ο $\boldsymbol{D^{-1}}$ είναι γνωστός, τότε λόγω της σχέσης $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M^{-1}} = I$ μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{B_1} \\ \boldsymbol{C_1} & \boldsymbol{D_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους. Ύστερα από λίγη Άλγεβρα καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$\boldsymbol{A_1} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}C)^{-1} \qquad \boldsymbol{B}_1 = -\boldsymbol{A_1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}$$
$$\boldsymbol{C_1} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A_1} \qquad \boldsymbol{D_1} = \boldsymbol{D}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B_1}$$

Ειδικότερα, αν ο ομαλός πίνακας $\boldsymbol{M}$ έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$$

όπου $\boldsymbol{O}$ είναι ο μηδενικός $m \times k$ πίνακας και αν ο $\boldsymbol{R^{-1}}$ υπάρχει, τότε σύμφωνα με την παραπάνω σχέση,

Κεφάλαιο 4

Γραφική επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

4.1 Εισαγωγή

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming - LP) εφαρμόζεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι "γραμμικές" συναρτήσεις. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε προβλήματα βιομηχανίας, μεταφορών, οικονομικών, συστημάτων υγείας, αγροτικής οικονομίας, κοινωνικών συμπεριφορών, κοινωνικών επιστημών, στρατιωτικών εφαρμογών κ.τ.λ.

Υπάρχουν πολύ αποτελεσματικά προγράμματα για την επίλυση των LP προβλημάτων, τα οποία λόγω της ευκολίας επίλυσής τους αποτελούν τη ραχοκοκαλιά για το σύνολο των αλγορίθμων των προβλημάτων της επιχειρησιακής έρευνας. Για έναν σύμβουλο επιχείρησης ο οποίος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα της θεωρίας αποφάσεων, η μαθηματική επίλυση του προβλήματος αποτελεί μόνο τη μία πλευρά της απάντησης. Η ανάλυση που χρησιμοποιεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα προκειμένου να κατορθώσει να κατανοήσει και να περιγράψει με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζει, καθώς και την επίδραση των διαφόρων περιορισμών ονομάζεται Ανάλυση Ευαισθησίας.

Κάποιες φορές η βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος είναι πιο σημαντική και από την ίδια την αριθμητική λύση του. Ένα από τα πλεονεκτήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ότι μπορεί να προσφέρει τέτοιες πληροφορίες "ευαισθησίας" σαν ένα κομμάτι της λύσης. Βέβαια για να μπορέσει να κατανοήσει κάποιος την ίδια την Ανάλυση Ευαισθησίας, πρέπει πρώτα να έχει κατανοήσει την ίδια τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Στη συνέχεια λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε ένα πρόβλημα 2 μεταβλητών σαν υπόδειγμα για να παρουσιάσουμε τη γραφική επίλυση LP προβλημάτων. Θα ακολουθήσει η αλγεβρική επίλυση, η Ανάλυση Ευαισθησίας, η επίλυση με τη μέθοδο Simplex, κ.τ.λ.

4.2 Γραφική επίλυση (Graphical solution)

Συνήθως, δεν έχουμε τη δυνατότητα γραφικής επίλυσης των LP προβλημάτων κυρίως λόγω της αδυναμίας μας να παραστήσουμε γραφικά πάνω από τρεις διαστάσεις. Ωστόσο, είναι αρκετά χρήσιμο να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επιλύεται γραφικά ένα απλό πρόβλημα δύο μεταβλητών, καθώς αντίστοιχα προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων έχουν ανάλογες λύσεις.

Παράδειγμα 4.1

Μία εταιρεία παράγει δύο προϊόντα Α και Β. Η παραγωγική διαδικασία κάθε κομματιού των παραπάνω προϊόντων απαιτεί συγκεκριμένο χρόνο λειτουργίας δύο διαφορετικών μηχανημάτων. Το πρώτο μηχάνημα είναι διαθέσιμο για 20 ώρες ημερησίως και το δεύτερο για 12 ώρες ημερησίως. Η παραγωγή της κάθε μονάδας του προϊόντος Α απαιτεί 2 ώρες λειτουργίας του πρώτου μηχανήματος και 1 ώρα του δεύτερου. Αντίστοιχα, η παραγωγή της κάθε μονάδας του προϊόντος Β απαιτεί 4 ώρες λειτουργίας του πρώτου μηχανήματος και 3 ώρες λειτουργίας του δεύτερου μηχανήματος. Το αντίστοιχο κέρδος για την εταιρεία ανέρχεται σε 40 € για κάθε μονάδα του Α προϊόντος και σε 100 € για κάθε μονάδα του Β προϊόντος. Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να πουλήσει όλη την ποσότητα των παραγόμενων προϊόντων. Αν υποθέσουμε πως σκοπός της εταιρείας είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της, να βρεθεί πόσες μονάδες από κάθε προϊόν θα πρέπει να παράγει ημερησίως για να πετύχει το σκοπό της.

Λύση

Ορισμός μεταβλητών:

Έστω x_1, x_2 οι μεταβλητές του προβλήματος, με

$$x_1 \coloneqq \text{Αριθμός μονάδων του προϊόντος Α που παράγονται ανά ημέρα}$$

$$x_2 \coloneqq \text{Αριθμός μονάδων του προϊόντος Β που παράγονται ανά ημέρα}$$

Αντικειμενική συνάρτηση:

Έστω z το ημερήσιο κέρδος. Ο σκοπός της εταιρείας είναι η μεγιστοποίηση του ημερήσιου κέρδους της, που μπορούμε να εκφράσουμε με την παρακάτω εξίσωση:

$$max\ z = 40x_1 + 100x_2 \quad Μεγιστοποίηση\ κέρδους$$

Υπό τους περιορισμούς:

Περιορισμοί διαθεσιμότητας της λειτουργίας των μηχανημάτων

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & \leq 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq 12 \end{array}$$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας

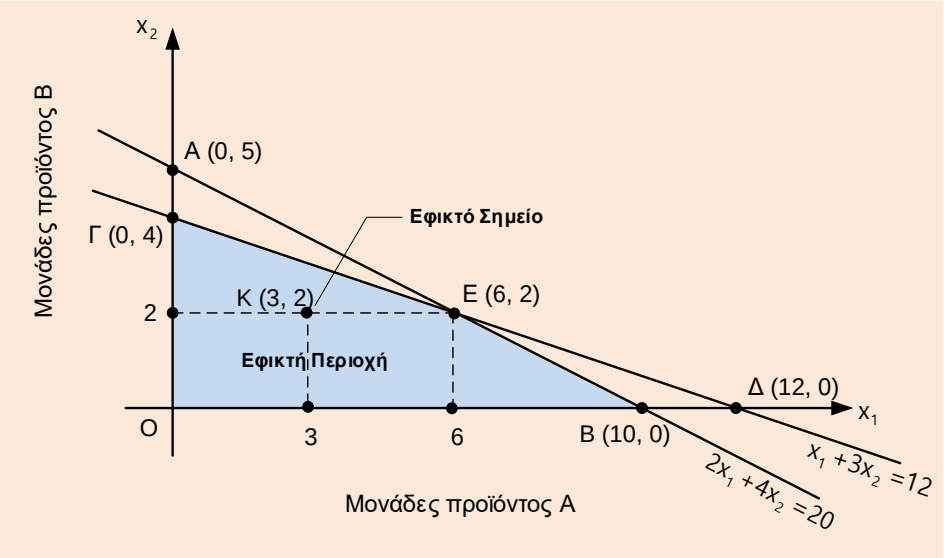
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος	
Μεγιστοποίησε την:	$z = 40x_1 + 100x_2$
Υπό τους περιορισμούς:	$2x_1 + 4x_2 \leq 20$ $x_1 + 3x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$

Πίνακας 4.1: Μορφοποίηση προβλήματος

Στο σχήμα 4.1 που ακολουθεί, δίνεται μία γραφική αναπαράσταση των δύο περιορισμών του προβλήματος. Η ανισότητα, $2x_1 + 4x_2 \leq 20$, αφορά τον περιορισμό σχετικά με τη διαθεσιμότητα των ωρών λειτουργίας ανά ημέρα του πρώτου μηχανήματος (20 ώρες). Όμοια, η ανισότητα, $x_1 + 3x_2 \leq 12$, αφορά τον περιορισμό της διαθεσιμότητας των ωρών λειτουργίας ανά ημέρα του δεύτερου μηχανήματος (12 ώρες). Τέλος, έχουμε και δύο περιορισμούς μη-αρνητικότητας, $x_1, x_2 \geq 0$, καθώς οι ποσότητες x_1 και x_2 αφορούν αριθμούς μονάδων προϊόντων και δεν είναι δυνατό να λάβουν αρνητικές τιμές. Όλα τα γραμμοσκιασμένα σημεία που βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο αριστερά και κάτω από τις ευθείες αφορούν τους διάφορους εφικτούς συνδυασμούς μονάδων των προϊόντων τύπου Α και Β αντίστοιχα.

Ας σκεφτούμε τώρα το σημείο $K(3,2)$ που βρίσκεται μέσα στη γραμμοσκιασμένη περιοχή. Ένας τέτοιος συνδυασμός σημαίνει την παραγωγή 3 μονάδων τύπου Α και 2 τύπου Β και απαιτεί τη λειτουργία $2 \times 3 + 4 \times 2 = 14$ ωρών του πρώτου μηχανήματος. Δεδομένου ότι ο αριθμός των ωρών είναι μικρότερος από 20, λέμε ότι ο συνδυασμός μονάδων που αντιστοιχεί στο σημείο K ικανοποιεί τον πρώτο περιορισμό.



Σχήμα 4.1: Γραφική επίλυση προβλήματος Γ.Π.

Όμοια, απαιτούνται $1 \times 3 + 3 \times 2 = 9$ ώρες λειτουργίας του δεύτερου μηχανήματος, αριθμός μικρότερος από 12. Τέλος, και οι δύο μεταβλητές x_1 και x_2 ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς μη-αρνητικότητας, καθώς λαμβάνουν θετικές τιμές. Καθώς λοιπόν ο συνδυασμός παραγόμενων μονάδων που

Κεφάλαιο 5

Η μέθοδος Simplex

5.1 Εισαγωγή

Το βασικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού είναι να βελτιστοποιηθεί μία αντικειμενική συνάρτηση η οποία εξαρτάται από πολλές μεταβλητές που υπόκεινται σε ένα σύνολο περιορισμών[1]. Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι γραμμικές σχέσεις. Το 1947, ο G. Dantzig[2] δουλεύοντας για το Πεντάγωνο των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής κατά τη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου, διατύπωσε το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και σχεδίασε τη μέθοδο Simplex για μία συστηματική επίλυση του προβλήματος, η οποία όμως στη χειρότερη περίπτωση χρειαζόταν εκθετικό χρόνο. Το 1979, ο Khachiyan[3] ανακάλυψε τον πρώτο πολυωνυμικό αλγόριθμο για τον γραμμικό προγραμματισμό, την ελλειψοειδή μέθοδο, η οποία όμως δεν είχε μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, γιατί στις περισσότερες εφαρμογές έδινε χειρότερα αποτελέσματα από τη μέθοδο Simplex. Τελικά, το 1984, ο Karmarkar[4] ανακάλυψε έναν άλλο πολυωνυμικό αλγόριθμο που είχε και πρακτικά αποτελέσματα καλύτερα από τη μέθοδο Simplex[5].

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η γραφική μέθοδος για την επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού δείχνει ότι η βέλτιστη λύση πάντοτε συνδέεται με ένα ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων. Αυτό το αποτέλεσμα είναι το κλειδί για την ανάπτυξη της γενικής αλγεβρικής μεθόδου Simplex για τη λύση κάθε προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Η μετάβαση από τη γεωμετρική λύση ακρότατου σημείου στη μέθοδο Simplex περιλαμβάνει μία υπολογιστική διαδικασία που καθορίζει τα

---

[1] Παπαγεωργίου, Γ. (2004). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα - Γραμμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές*, Ε.Μ.Π, Αθήνα.

[2] Dantzig, G. B. (1951a). *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In Activity Analysis of Production and Allocation*, Koopmans, T. C., Ed. Wiley, New York, Chapter XXI, pp. 339-347.

[3] Khachiyan, L. and Fredman, M. L. (1996). On the Complexity of Dualization of Monotone, Disjunctive Normal Forms, *Journal of Algorithms*, 21, pp. 618-628.

[4] Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4, pp. 373-395.

[5] Ζάχος, Σ. (2005). *Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα.

Βάση	**Βασικές Μεταβλητές**	c_1	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
B	x_B	y_1	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n
b_1	$x_{B1} - y_{1k}\frac{x_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{11} - y_{1k}\frac{y_{r1}}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{1n} - y_{1k}\frac{y_{rn}}{y_{rk}}$
b_2	$x_{B2} - y_{2k}\frac{x_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{21} - y_{2k}\frac{y_{r1}}{y_{rk}}$		0		$y_{2n} - y_{2k}\frac{y_{rn}}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
$b_r = \alpha_k$	$\frac{x_{Br}}{y_{rk}}$	$\frac{y_{r1}}{y_{rk}}$		1		$\frac{y_{rn}}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
b_m	$x_{Bm} - y_{mk}\frac{x_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{m1} - y_{mk}\frac{y_{r1}}{y_{rk}}$		0		$y_{mn} - y_{mk}\frac{y_{rn}}{y_{rk}}$
	$z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	$(z_1 - c_1) - \frac{y_{r1}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(z_n - c_n) - \frac{y_{rn}}{y_{rn}}(z_k - c_k)$

Πίνακας 5.2: Μετασχηματισμένος πίνακας Simplex

Παράδειγμα 5.6

Θα επιλύσουμε το παράδειγμα 5.5 με τη βοήθεια του Simplex tableau.

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$max\, z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0s_1$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +s_1 & = 40 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 30 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0$$

Από το παραπάνω σύστημα έχουμε:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ με } \boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε επιλέξει σαν αρχική βάση τον πίνακα $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_4}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, με $det(\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_4}| \Rightarrow det(\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, οπότε και $\boldsymbol{B^{-1}} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Έχουμε υπολογίσει (Βήμα 1, παράγραφος 5.13) την αρχική βασική εφικτή λύση $\boldsymbol{x_B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Το αποτέλεσμα δίνεται στο παρακάτω Simplex tableau:

Βάση	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	**Βασικές Μεταβλητές (Λύση)**
R_1	1	1	0	1	0	0	**900**
R_2	-0.12	**0.05**	-1	0	1	0	**0**
x_4	-0.01	-0.02	0	0	0	1	**0**
r	0.88	1.05	-1	0	0	0	**900**

Πίνακας 5.14

Η καινούργια r-γραμμή χρησιμοποιείται για την επίλυση της **Φάσης Ι** του προβλήματος. Η πρώτη επανάληψη **Φάσης Ι** δίνεται στο παρακάτω Simplex tableau μετά από γραμμο-πράξεις με οδηγό στοιχείο το $y_{2,2} = 0.05$:

Βάση	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	**Βασικές Μεταβλητές (Λύση)**
R_1	3.4	0	20	1	-20	0	**900**
x_2	-2.4	1	-20	0	20	0	**0**
x_4	-0.058	0	-0.4	0	0.4	1	**0**
r	3.4	0	20	0	-21	0	**900**

Πίνακας 5.15

Τελικά, ύστερα από ακόμα μία επανάληψη της μεθόδου με οδηγό στοιχείο το $y_{1,3} = 20$ προκύπτει το εξής Simplex tableau:

Βάση	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	**Βασικές Μεταβλητές (Λύση)**
x_3	0.17	0	1	0.05	-1	0	**45**
x_2	1	1	0	1	0	0	**900**
x_4	0.01	0	0	0.02	0	1	**18**
r	0	0	0	-1	-1	0	**0**

Πίνακας 5.16

Κεφάλαιο 6

Επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τη βοήθεια υπολογιστικών πακέτων

6.1 Εισαγωγή

Για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι διαθέσιμη μεγάλη ποικιλία λογισμικού, κατάλληλου όχι μόνο για ισχυρές υπολογιστικές μονάδες, αλλά ακόμα και για προσωπικούς υπολογιστές (PC). Φυσικά, η επίλυση πολύ μεγάλων προβλημάτων, στα οποία υπεισέρχονται χιλιάδες μεταβλητές και άλλοι τόσοι περιορισμοί (π.χ. αποκωδικοποίηση της έλικας του DNA στον τομέα της Ιατρικής, ψηφιοποίηση εικόνας σε videogames, βελτιστοποίηση σχήματος σε διάφορες κατασκευές, μοντελοποίηση μετεωρολογικών συστημάτων για την πρόγνωση του καιρού, κ.τ.λ.) απαιτεί τη χρήση μεγάλων υπολογιστικών συστημάτων. Προβλήματα όμως σαν τις ασκήσεις του παρόντος βιβλίου ή σαν τα προβλήματα που ρεαλιστικά αντιμετωπίζει μία μεσαίου μεγέθους επιχείρηση στην καθημερινότητά της, μπορούν με ευκολία να λυθούν με τα υπολογιστικά πακέτα που διαθέτουμε σε ένα συνηθισμένο προσωπικό υπολογιστή. Στο παρόν κεφάλαιο, θα περιγραφεί η επίλυση μερικών χαρακτηριστικών προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τρία από τα σπουδαιότερα πακέτα λογισμικού:

a) Τον "επιλυτή"-"Solver[1]", ο οποίος βρίσκεται ενσωματωμένος στο φύλλο εργασίας - spreadsheet του προγράμματος Excel[2].
b) Το πρόγραμμα LINDO[3] (**L**inear **IN**teractive **D**iscrete **O**ptimizer).
c) Το πακέτο ελεύθερου λογισμικού LibreOffice.

---

[1] Κατοχυρωμένο εμπορικό σήμα της εταιρείας Frontline Systems, Inc.
[2] Οι διάφοροι υπολογισμοί έγιναν στην έκδοση 2010 του προγράμματος Excel, του πακέτου λογισμικού Microsoft Office, της εταιρείας Microsoft Corporation, στην οποία ανήκουν και τα αντίστοιχα εμπορικά σήματα.
[3] Κατοχυρωμένο εμπορικό σήμα της εταιρείας LINDO Systems Inc.

6.2 Solver

6.2.1 Υπόδειγμα επίλυσης Solver

Για την ενεργοποίηση του επιλυτή Solver του Excel ακολουθούμε την εξής διαδρομή:

Excel → File → Options → Add Ins → Solver Add In → Go → OK

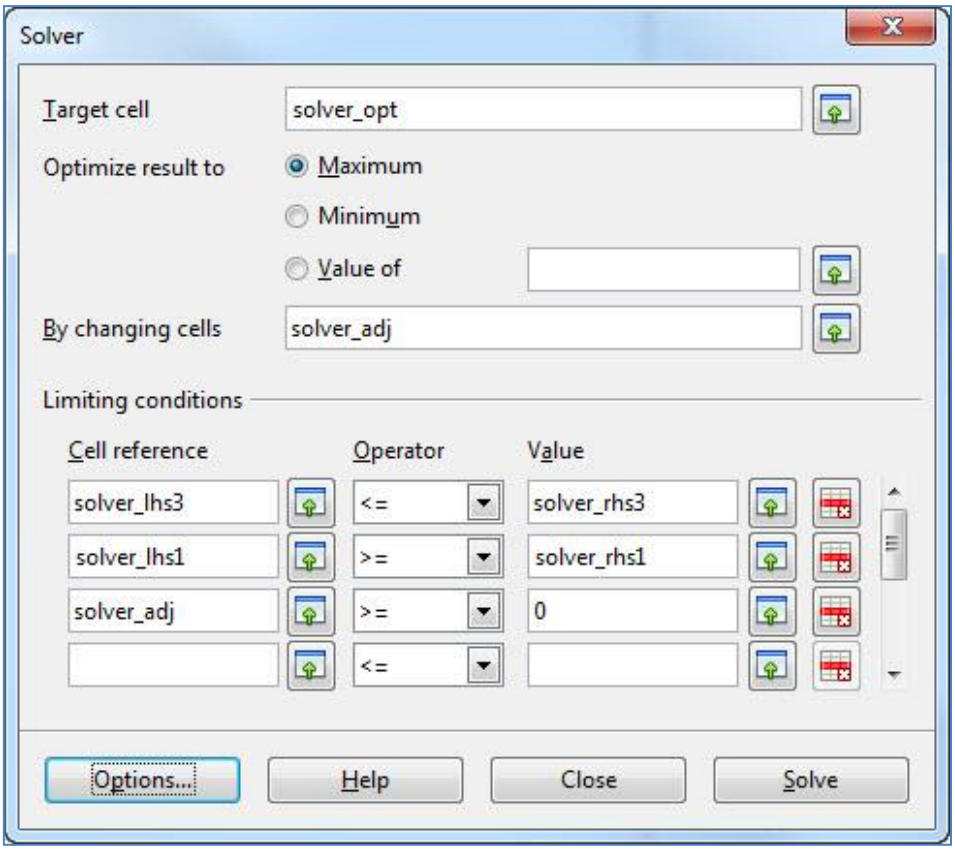
Για την περιγραφή του Solver ας θεωρήσουμε την εταιρεία Gloman που παράγει τα 4 είδη προϊόντων Α, Β, Γ και Δ της άλυτης άσκησης 4 του κεφαλαίου 2. Το πρόβλημα αφορά τη μεγιστοποίηση του κέρδους Ρ της εταιρείας από την πώληση των προϊόντων της. Στην εικόνα 6.1 διακρίνουμε **4** είδη κελιών:

I. Τα κελιά που περιέχουν τα δεδομένα του προβλήματος, B8:E13 (αντιστοιχεί στα κελιά B8:B13, C8:C13, D8:D13, E8:E13) και H8:H13.
II. Τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές απόφασης (decision variables). Τα κελιά αυτά είναι τα B16:E16.
III. Τα κελιά στα οποία γίνονται οι διάφοροι υπολογισμοί. Τα κελιά αυτά είναι τα F5, F8:F13, I8:J13.
IV. Τα υπόλοιπα κελιά περιέχουν κατατοπιστικές πληροφορίες - σχόλια για το χρήστη.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Εταιρία κατασκευών Gloman									
2	Δεδομένα (Input Data):									
3		Προϊόντα								
4		Α	Β	Γ	Δ	Σύνολο				
5	Αντικειμενική συνάρτηση	40	24	36	23	18300				
6	Περιορισμοί:									
7						Σύνολο πόρων		Όριο Περιορισμών	Slack	Surplus
8	Ώρες φρεζαρίσματος	2	1	2.5	5	1200	≤	1200	0	
9	Ώρες συναρμολόγησης	1	3	2.5	0	1600	≤	1600	0	
10	Διαθέσιμο κεφάλαιο για την αγορά πρώτων υλών	10	5	2	12	4700	≤	10000	5,300	
11	Ζήτηση προϊόντος Α	1	0	0	0	100	≤	200	100	
12	Ζήτηση προϊόντος Γ	0	0	1	0	0	≤	160	160	
13	Ελάχιστη παραγωγή Δ	0	0	0	1	100	≥	100		0
14	Αποτελέσματα (Output Results):									
15		Α	Β	Γ	Δ					
16	Λύση	100	500	0	100					

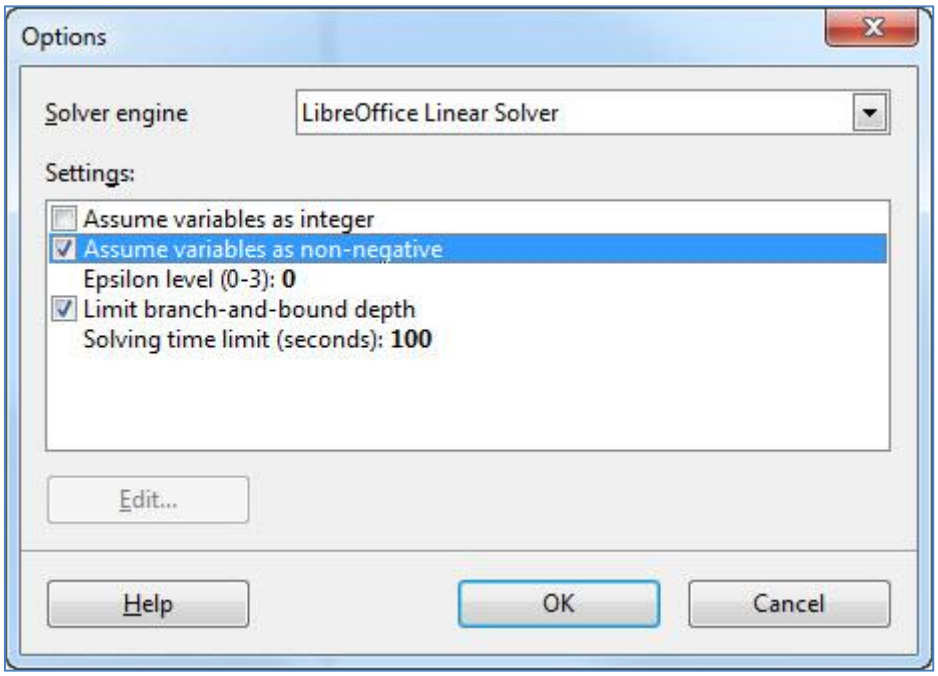
Εικόνα 6.1: Υπολογιστικό φύλλο του Excel για την επίλυση του προβλήματος της εταιρείας Gloman

Πιο αναλυτικά, στο πάνω τμήμα της εικόνας 6.1 έχουν καταχωρηθεί τα δεδομένα του προβλήματος, σε μορφή που να μπορεί να επεξεργαστεί ο Solver. Αντίστοιχα, στο κάτω τμήμα της εικόνας και στις θέσεις B16:E16 βρίσκονται τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος. Μετά από την επίλυση, στις θέσεις αυτές θα καταχωρηθεί η τελική λύση του προβλήματος. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

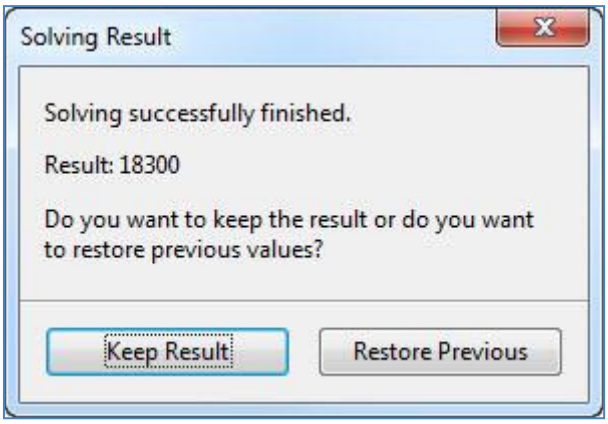


Εικόνα 6.14: Ο επιλυτής Solver του LibreOffice για το πρόβλημα της εταιρείας Gloman

Επιλέγουμε “OK” και στη συνέχεια “Solve” και έχουμε την εικόνα 6.16. Ο Solver μας πληροφορεί εάν βρήκε λύση και μας παραθέτει τη λύση αυτή.



Εικόνα 6.15: Επιλογές του επιλυτή του LibreOffice



Εικόνα 6.16: Ανακοίνωση του αποτελέσματος της επίλυσης

Ένα μειονέκτημα του λογισμικού LibreOffice είναι πως δεν μας παρέχεται η επιλογή της ανάλυσης ευαισθησίας. Το πρόγραμμα μας ενημερώνει μόνο για την επιλυσιμότητα του προβλήματος και για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

6.5 Εφαρμογές του υπολογιστικού πακέτου Solver

Στην παράγραφο αυτή θεφαρμόσουμε το υπολογιστικό πακέτο Solver για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων των οποίων η μοντελοποίηση παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.2 .

6.5.1 Προγραμματισμός παραγωγής (Production Management)

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα του παραδείγματος 2.1. Υπενθυμίζουμε τον πίνακα με τον χρόνο σε min που απαιτείται για την επεξεργασία μίας μονάδας από το κάθε προϊόν σε κάθε μηχανή, τον διαθέσιμο ημερήσιο χρόνο κάθε μηχανής και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος (σε χρηματικές μονάδες).

	Χρόνος επεξεργασίας κάθε προϊόντος στις διάφορες μηχανές				Διαθέσιμος ημερήσιος χρόνος κάθε μηχανής (min)
	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3	Προϊόν 4	
Μηχανή 1	4	2	3	1	420
Μηχανή 2	2	3	1	3	280
Μηχανή 3	3	0	1	0	210
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	6	4	3	5	

Πίνακας 6.1: Χρόνοι επεξεργασίας και κέρδη ανά προϊόν

Ορίζουμε ως μεταβλητές απόφασης τις ποσότητες x_1, x_2, x_3 και x_4 που θα παράγονται ημερησίως από τα προϊόντα Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4 αντίστοιχα. Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.2 , η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{maximize Profit } = max\ z = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \quad \text{Μεγιστοποίηση κέρδους}$$

Κεφάλαιο 7

Το δυϊκό πρόβλημα

7.1 Εισαγωγή

Η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού βασίζεται στις εφήμερες συνθήκες που κυριαρχούν τη στιγμή κατά την οποία το μοντέλο του προβλήματος κατασκευάζεται και επιλύεται. Σε προβλήματα πραγματικών συνθηκών, τα διάφορα περιβάλλοντα αποφάσεων παραμένουν στατικά μόνο σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να καθορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει η βέλτιστη λύση όταν αλλάζουν οι παράμετροι του μοντέλου. Με αυτό το πρόβλημα ασχολείται η **ανάλυση ευαισθησίας**. Παρέχει ικανές υπολογιστικές τεχνικές που βοηθούν στη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της βέλτιστης λύσης, η οποία προκύπτει από τις διάφορες αλλαγές που προκύπτουν στις παραμέτρους του μοντέλου. Έχουμε ήδη ασχοληθεί με την ανάλυση ευαισθησίας στις παραγράφους 4.3 και 6.2.2. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με τη θεωρία της δυϊκότητας, έτσι ώστε να παρέχουμε έναν αλγεβρικό τρόπο αντιμετώπισης αυτού του τόσο σημαντικού πρακτικού προβλήματος.

7.2 Ορισμός του δυϊκού προβλήματος

Το **δυϊκό** πρόβλημα (**dual** problem) είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο καθορίζεται με ντετερμινιστικό τρόπο από το **αρχικό** ή **πρωτεύον** (**primal** ή **original**) μοντέλο προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Η συσχέτιση των δύο προβλημάτων είναι τόσο απόλυτη, ώστε αν με κάποιο τρόπο (π.χ. επίλυση με τη μέθοδο Simplex) αποκτήσουμε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος, οδηγούμαστε με φυσιολογικό τρόπο στη λύση του δυϊκού (και αντιστρόφως). Το είδος της βελτιστοποίησης (max ή min), οι μορφές των ανισοτήτων των περιορισμών ($\leq, \geq$ ή $=$), καθώς και το είδος των μεταβλητών (ελεύθερες χωρίς πρόσημο ή μη αρνητικές) του πρωτεύοντος προβλήματος, προσδιορίζουν πλήρως το δυϊκό πρόβλημα.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μία απλή διαδικασία που καλύπτει όλες τις μορφές του πρωτεύοντος προβλήματος. Η κατασκευή του δυϊκού προβλήματος προϋποθέτει να τεθεί το πρωτεύον πρόβλημα στην

κανονική του μορφή, που έχουμε ήδη παρουσιάσει στο κεφάλαιο 5 (όλοι οι περιορισμοί είναι ισότητες με μη αρνητικά δεύτερα μέλη και ισχύει για όλες τις μεταβλητές ο περιορισμός μη αρνητικότητας).

Από εδώ και στο εξής, οποιαδήποτε αποτελέσματα προκύψουν από τη λύση του αρχικού προβλήματος εφαρμόζονται κατευθείαν στο αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα. Για να δείξουμε πώς κατασκευάζεται το δυϊκό πρόβλημα, γράφουμε το αρχικό μας πρόβλημα σε μορφή εξισώσεων ως εξής:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$max \text{ ή } min \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$$

Οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ περιλαμβάνουν ελλειμματικές, πλεονασματικές και τεχνητές, αν βέβαια υπάρχουν στο πρόβλημά μας. Ο πίνακας 7.1 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το δυϊκό πρόβλημα κατασκευάζεται από το πρωτεύον.

	Μεταβλητές του πρωτεύοντος προβλήματος					
	x_1	…	x_j	…	x_n	
Μεταβλητές του δυϊκού	c_1	…	c_j	…	c_n	
y_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
y_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
			j-στος δυϊκός περιορισμός			Συντελεστές αντικειμενικής συνάρτησης δυϊκού προβλήματος

Πίνακας 7.1: Κατασκευή δυϊκού προβλήματος

Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν τα εξής:

Κεφάλαιο 8

Ακέραιος Προγραμματισμός

8.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα του **Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού** (**Integer Linear Programming - ILP**) είναι εκείνα τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού, των οποίων όλες ή μερικές από τις μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες (διακριτές) τιμές.

Το μαθηματικό μοντέλο του Ακέραιου Προγραμματισμού είναι ίδιο με εκείνο του Γραμμικού Προγραμματισμού με τον επιπλέον περιορισμό των ακέραιων μεταβλητών. Για τις μεταβλητές που είναι ακέραιες, καταργείται επομένως η προϋπόθεση της διαιρετότητας (παράγραφος 3.3). Εάν ορισμένες μόνο από τις μεταβλητές απαιτείται να είναι ακέραιες και επομένως η ιδιότητα της διαιρετότητας ισχύει για τις υπόλοιπες, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα **μεικτού** Ακέραιου Προγραμματισμού (mixed ILP). Στην περίπτωση όμως που όλες οι μεταβλητές απαιτείται να είναι ακέραιες, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως **καθαρό** πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (pure ILP).

Για παράδειγμα, τα προβλήματα του προγραμματισμού παραγωγής, της επιλογής διαφημιστικού πλάνου, της εκχώρησης προσωπικού σε θέσεις εργασίας, αλλά και το πρόβλημα της κατάρτισης προγράμματος εργασίας ελάχιστου κόστους που συναντήσαμε στην παράγραφο 2.2 , είναι αντιπροσωπευτικά παραδείγματα προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού. Ιδιαίτερη σημασία για τον Ακέραιο Προγραμματισμό έχει το πρόβλημα της εκχώρησης προσωπικού σε θέσεις εργασίας, όπου οι μεταβλητές μπορούν να λαμβάνουν μόνο δύο πιθανές τιμές, “ναι” ή “όχι” (“yes” ή “no”). Συνεπώς, η i-οστή μεταβλητή μπορεί να παρασταθεί:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{εάν η } i\text{-οστή απόφαση είναι "ναι"} \\ 0, \text{εάν η } i\text{-οστή απόφαση είναι "όχι"} \end{cases}$$

Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται **δυαδικές μεταβλητές** (**binary variables**) ή **“0-1”** μεταβλητές. Αντίστοιχα, τα ILP προβλήματα που περιέχουν τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται δυαδικά προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού (Binary ILP ή BILP).

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μερικά τυπικά προβλήματα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.

8.2 Μοντελοποίηση προβλήματος Ακέραιου Προγραμματισμού

Κατάρτιση προγράμματος εργασίας (Shifts problem)

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα του παραδείγματος 2.6. Υπενθυμίζουμε τον πίνακα με τον ελάχιστο αριθμό σερβιτόρων που απαιτούνται ανά ημέρα,

Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
Σερβιτόροι	11	13	15	14	19	22	11

Πίνακας 8.1

Υπενθυμίζουμε ότι x_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$ είναι το πλήθος των σερβιτόρων που ξεκινούν την πενθήμερη εργασία τους την i-ημέρα και όχι όσοι εργάζονται την i-ημέρα. Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.2 , η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{minimize z} = \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}$$

Περιορισμοί:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19 \quad (\text{Παρασκευή})$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 22 \quad (\text{Σάββατο})$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \quad (\text{Κυριακή})$$
$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \quad (\text{Δευτέρα})$$
$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \quad (\text{Τρίτη})$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \quad (\text{Τετάρτη})$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 14 \quad (\text{Πέμπτη})$$

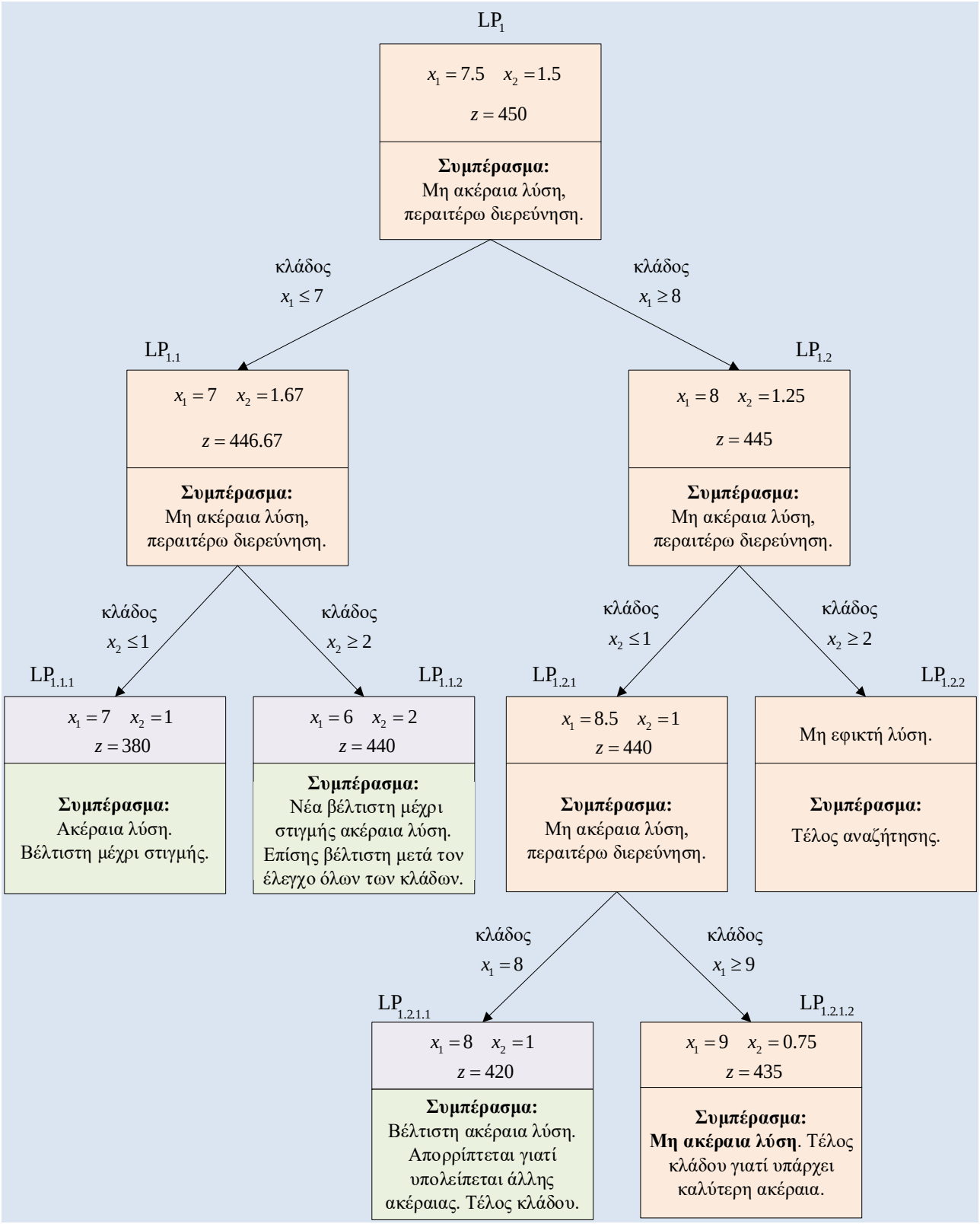
και επί πλέον

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 7$$

Μεταφέρουμε το μαθηματικό μοντέλο σε ένα φύλλο εργασίας (spreadsheet), όπως φαίνεται στον πίνακα 8.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Ημέρα	ΔΕ	ΤΡ	ΤΕ	ΠΕ	ΠΑ	ΣΑ	ΚΥ
3		Σερβιτόροι που ξεκινούν δουλειά	0	0	0	0	0	0	0
4									
5			Περιορισμοί						
6		Σερβιτόροι που δουλεύουν	0	0	0	0	0	0	0
7			≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥
8			11	13	15	14	19	22	11
9									
10		Συνολικό πλήθος εργαζομένων:						0.00	

Πίνακας 8.2: Πίνακας με τα δεξιά μέλη των περιορισμών ως δεδομένα



Σχήμα 8.7: Δένδρο του B&B αλγορίθμου για το LP_1 πρόβλημα

Κεφάλαιο 9

Το πρόβλημα της μεταφοράς και το πρόβλημα της ανάθεσης

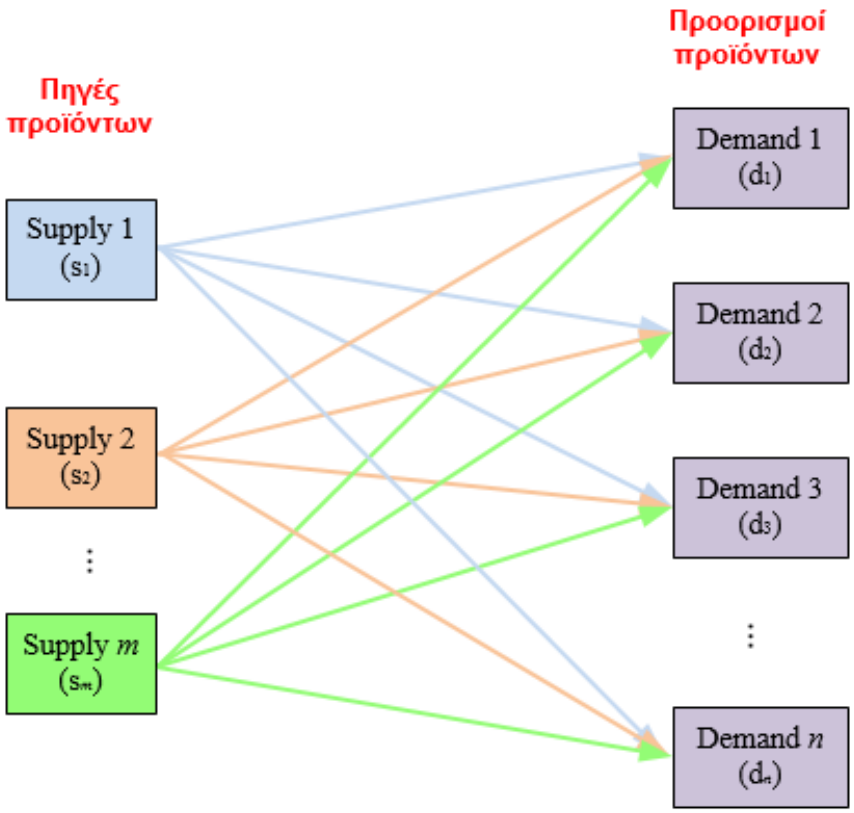
9.1 Το πρόβλημα της μεταφοράς (Transportation problem)

Το **πρόβλημα μεταφοράς** είναι μια ειδική κατηγορία προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού, η οποία ασχολείται συνήθως με περιπτώσεις αποστολής προϊόντων προερχόμενων από διάφορες **πηγές (origins, sources)** σε διάφορους **προορισμούς (destinations)**. Οι πηγές μπορεί να είναι εργοστάσια, σημεία φόρτωσης, κ.α., ενώ οι προορισμοί μπορεί να είναι κέντρα κατανάλωσης, πόλεις, αποθήκες κ.α. Σκοπός είναι ο προσδιορισμός ενός πλάνου μεταφοράς που μειώνει στο ελάχιστο το συνολικό κόστος μεταφοράς, ενώ παράλληλα ικανοποιεί τους διάφορους περιορισμούς προσφοράς και ζήτησης. Το πρόβλημα της μεταφοράς προϋποθέτει ότι το κόστος μεταφοράς είναι ανάλογο του αριθμού των μονάδων που μεταφέρονται σε μια συγκεκριμένη διαδρομή.

Γενικά, το πρόβλημα της μεταφοράς μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες περιοχές της επιχειρησιακής έρευνας, όπως είναι ο έλεγχος των αποθηκών, η διαχείριση ανθρώπινου δυναμικού κ.τ.λ. Παρόλο που το πρόβλημα της μεταφοράς μπορεί να επιλυθεί σαν ένα κανονικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, η ειδική του δομή επιτρέπει την ανάπτυξη ενός υπολογιστικού αλγορίθμου τύπου Simplex, ο οποίος χρησιμοποιεί τις σχέσεις πρωτεύοντος - δυικού προβλήματος προκειμένου να απλοποιήσει τους υπολογισμούς. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει τον αλγόριθμο αυτόν και τονίζει τη στενή του σχέση με τη μέθοδο Simplex.

Ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς ονομάζεται **βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς** (optimal transportation plan) και προκύπτει με βάση το κριτήριο του συνολικού κόστους μεταφοράς των αγαθών από τις διάφορες πηγές στους διάφορους προορισμούς. Σημειώνουμε ότι η **προσφορά - δυναμικότητα (supply, capacity)** κάθε πηγής είναι περιορισμένη.

9.2 Ορισμός του προβλήματος της μεταφοράς



Σχήμα 9.1: Το γενικό πρόβλημα μεταφοράς

Το γενικό πρόβλημα μεταφοράς παρουσιάζεται στο παραπάνω σχήμα. Υπάρχουν m πηγές $S_i,\ i = 1,2,\dots,m$ και n προορισμοί $D_j,\ j = 1,2,\dots,n$, που αντιπροσωπεύονται από κόμβους. Ονομάζουμε $c_{ij},\ i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$ το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος, από την i-οστή πηγή στον j-οστό προορισμό. Επίσης ονομάζουμε $x_{ij},\ i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$ την ποσότητα που μεταφέρθηκε από την i-οστή πηγή στον j-οστό προορισμό. Η προσφερόμενη ποσότητα στην i-οστή πηγή είναι $s_i,\ i = 1,2,\dots,m$, ενώ η ζητούμενη ποσότητα του j-οστού προορισμού είναι $d_j,\ j = 1,2,\dots,n$.

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των αγνώστων x_{ij} που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς ικανοποιώντας παράλληλα τους περιορισμούς προσφοράς και ζήτησης. Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, η γενική μορφή του προβλήματος μεταφοράς με m πηγές και n προορισμούς είναι η ακόλουθη:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{minimize Cost} = \min \mathrm{c} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i,\ i = 1,2,\dots,m \quad (\text{περιορισμοί προσφοράς})$$

Κεφάλαιο 10

Έλεγχος αποφάσεων υπό αβεβαιότητα - Δένδρα αποφάσεων

10.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ερευνήσουμε την εμπλοκή πιθανοτήτων στις αποφάσεις των επιχειρήσεων, όταν αυτές πρέπει να ληφθούν υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Θα αναπτύξουμε μεθοδολογία προκειμένου να παίρνουμε αποφάσεις, καθώς και να υπολογίζουμε το κόστος της αβεβαιότητας.

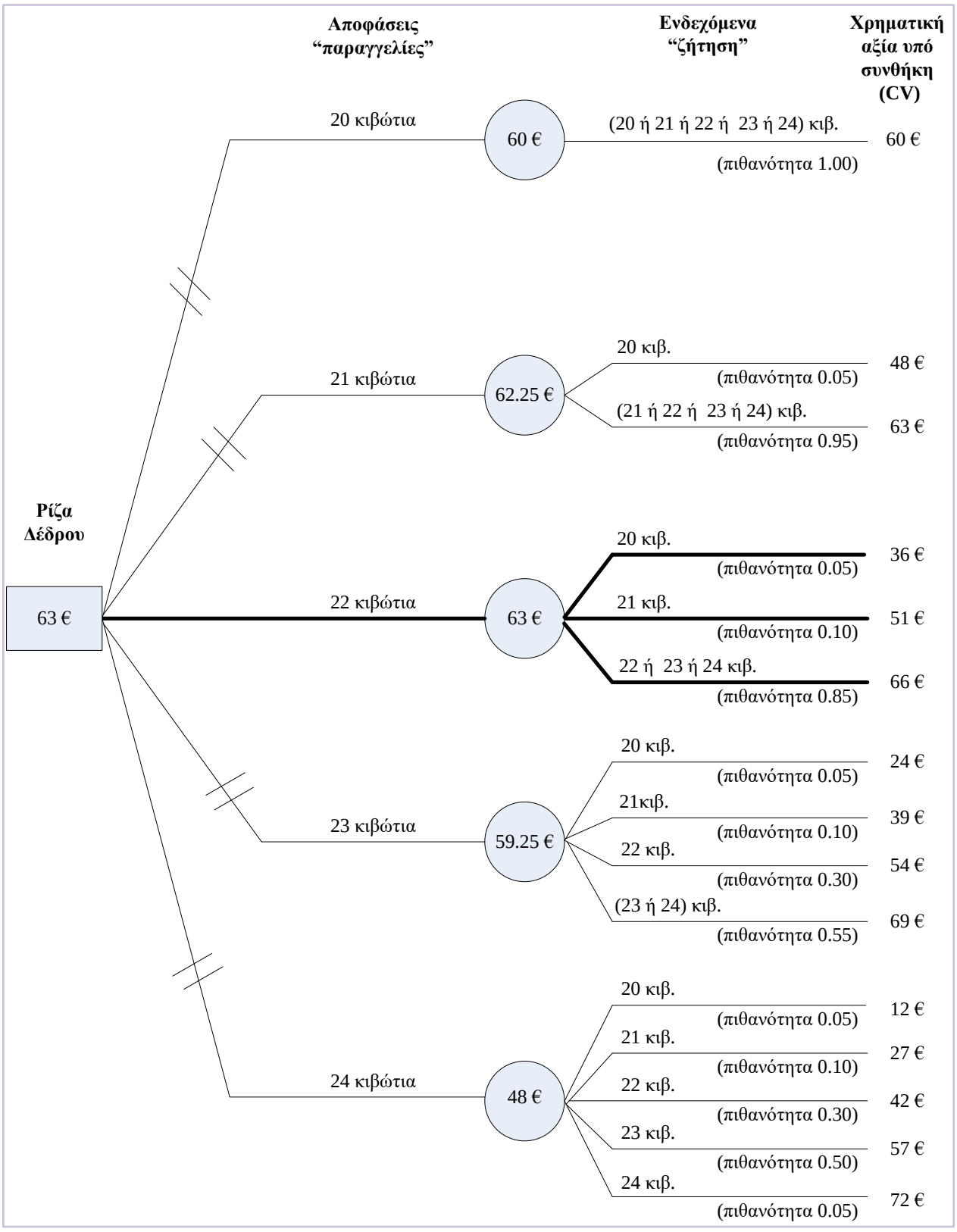
Αρχικά, θα εφαρμόσουμε το κριτήριο της αναμενόμενης (προσδοκώμενης, expected) αξίας υπό συνθήκη και στη συνέχεια το κριτήριο του αναμενόμενου (προσδοκώμενου) κόστους ευκαιρίας. Ακόμα, θα πειραματιστούμε προσπαθών-τας να καθορίσουμε πιθανότητες για τα διάφορα ενδεχόμενα πριν προχωρή-σουμε στη λήψη μιας απόφασης. Τέλος, θα παρουσιάσουμε τα δένδρα αποφάσεων σαν ένα εναλλακτικό τρόπο λήψης μιας απόφασης.

10.2 Αξία υπό συνθήκη (Conditional Value - CV)

Θα παρουσιάσουμε το κριτήριο απόφασης σύμφωνα με την αναμενόμενη αξία υπό συνθήκη μέσω ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 10.1

Ο ιδιοκτήτης ενός μικρού συνοικιακού παντοπωλείου επιθυμεί να καθορίσει πόσα κιβώτια γάλα πρέπει να παραγγείλει προκειμένου να ικανοποιήσει την ημερήσια ζήτηση και μόνο αυτή. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μέρα παραγγέλνει συγκεκριμένη ποσότητα κιβωτίων φρέσκου παστεριωμένου γάλακτος την οποία παραλαμβάνει την επόμενη με το άνοιγμα του καταστήματός του. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε ποσότητα γάλακτος μένει απούλητη στο τέλος της ημέρας, σηματοδοτεί μία ολική απώλεια για τον παντοπώλη. Ακόμη, οποιαδήποτε πλεονάζουσα ζήτηση που θα μείνει ανικανοποίητη δεν προκαλεί κάποιο επιπλέον κόστος εκτός του ότι χάθηκε η πώληση και επομένως η ευκαιρία να αποκομίσουμε από αυτή κάποιο κέρδος (κόστος ευκαιρίας, opportunity



Σχήμα 10.1: Δένδρο απόφασης για το παράδειγμα με το γαλακτοπώλη

Κεφάλαιο 11

Έλεγχος αποθεμάτων

11.1 Εισαγωγή

Ένας από τους σημαντικότερους συντελεστές για την επιτυχία μιας επιχείρησης είναι η πολιτική που θα ακολουθηθεί σχετικά με τις παραγγελίες (ή την παραγωγική διαδικασία) και την αποθήκευση των πρώτων υλών και προϊόντων της, με άλλα λόγια, η ορθή διαχείριση των αποθεμάτων της. Με τον όρο απόθεμα εννοούμε την ποσότητα ενός προϊόντος που μένει προσωρινά αχρησιμοποίητο, με σκοπό να ικανοποιηθεί η ζήτηση γι' αυτό το προϊόν, σε χρονικές περιόδους όπου η ζήτηση είναι μεγαλύτερη από την προσφορά. Αποθέματα δημιουργούνται, όταν οι εισερχόμενες ποσότητες πρώτων υλών, εξαρτημάτων και προϊόντων σε μια επιχείρηση ξεπερνούν τις εξερχόμενες ποσότητες.

Τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων έχουν γενικά ως σκοπό τον άριστο προγραμματισμό των παραγγελιών και της διαχείρισης των πρώτων υλών ή και των προϊόντων μιας επιχείρησης. Στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί μια συνολική συνάρτηση κόστους λειτουργίας που περιλαμβάνει κόστη παραγγελίας, αγοράς, μεταφοράς, αποθήκευσης, έλλειψης προϊόντος κ.ά., λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες σχετικά με τη ζήτηση, το περιβάλλον και διάφορους άλλους παράγοντες.

Στο κεφάλαιο αυτό, προσδιορίζονται οι παράγοντες που πιέζουν για χαμηλά ή υψηλά επίπεδα αποθέματος, καθώς και τα βασικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος αποθεμάτων. Ορίζονται οι διαφορετικοί τύποι αποθεμάτων και προτείνονται τακτικές για τη μείωσή τους σε περιπτώσεις που κρίνεται απαραίτητο. Στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου παραθέτουμε τα βασικά στοιχεία της "Ανάλυσης ABC" για το απόθεμα μιας επιχείρησης και δίνονται κάποια πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα.

11.2 Παράγοντες πίεσης για χαμηλά/υψηλά επίπεδα αποθέματος

Παράγοντες πίεσης για χαμηλά επίπεδα αποθεμάτων

Ο κυριότερος παράγοντας πίεσης για χαμηλά επίπεδα αποθέματος είναι το **κόστος διατήρησης**. Αυτό είναι το **μεταβλητό κόστος διακράτησης αποθέματος** και περιλαμβάνει το κόστος ευκαιρίας, το κόστος αποθήκευσης και διαχείρισης, τους φόρους, τις δαπάνες ασφάλισης και το κόστος από την πιθανή φθορά-

Μεθοδολογία επίλυσης του μοντέλου

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τις βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας (χωρίς περιορισμούς) από τον τύπο:

$$\mathrm{EOQ}_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{K_c}}\ , \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{11.11}$$

Βήμα 2: Ελέγχουμε αν οι ποσότητες EOQ_i του βήματος 1 ικανοποιούν τον περιορισμό διαθεσιμότητας του αποθηκευτικού χώρου (τύπος 11.10). Αν ναι, τότε είναι και οι ζητούμενες βέλτιστες. Αν όχι, συνεχίζουμε στο βήμα 3.

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας τη **μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange** (**Langrange multipliers**), έχουμε:

$$L(\lambda, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \mathrm{TC}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i - \mathrm{A}\right) \Rightarrow$$

$$L(\lambda, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{D_i}{\mathrm{Q_i}}K_i + \frac{Q_i}{2}K_{ci}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Q_i} - \mathrm{A}\right)$$

όπου $\lambda(<0)$ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Επειδή η συνάρτηση Lagrange είναι κυρτή, οι βέλτιστες τιμές των Q_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ και λ καθορίζονται από τις παρακάτω αναγκαίες συνθήκες:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{K_iD_i}{Q_i^2} + \frac{K_{ci}}{2} - \lambda\alpha_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{K_{ci} - 2\lambda\alpha_i}{2\mathrm{K}_iD_i} = \frac{1}{Q_i^2}.$$

Επιλύοντας ως προς $Q_i = \mathrm{EOQ}_i$, λαμβάνουμε:

$$\mathrm{EOQ}_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{K_{ci} - 2\lambda_{\mathrm{opt}}\alpha_i}}\ , \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{11.12}$$

Ακόμα, έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_iQ_i + A = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\mathrm{EOQ}_i = A \tag{11.13}$$

Ο τύπος (11.12) μας δείχνει ότι η βέλτιστη ποσότητα EOQ_i. εξαρτάται από τη βέλτιστη τιμή του λ, την οποία συμβολίζουμε με λ_{opt}.

Ο τύπος (11.13) μας δείχνει ότι ο περιορισμός του συνολικού διαθέσιμου χώρου αποθήκευσης ικανοποιείται ως ισότητα στη βέλτιστη λύση.

- Για .$\lambda_{\mathrm{opt}} = 0$, προκύπτει η λύση χωρίς τους περιορισμούς (11.10).
- Επειδή σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης εξ ορισμού $\lambda < 0$, υπολογίζουμε την ακριβή τιμή του λ_{opt} μειώνοντας διαδοχικά την τιμή του λ (κατά μία λογικά μικρή ποσότητα κάθε φορά) και τη χρησιμοποιούμε στον τύπο (11.12) ώστε να υπολογίσουμε τα EOQ_i. Η βέλτιστη τιμή λ_{opt} είναι εκείνη που τελικά δίνει τιμές για τα EOQ_i που ικανοποιούν τον περιορισμό του διαθέσιμου χώρου αποθήκευσης ως ισότητα (σχέση (11.13)).

Κεφάλαιο 12

Θεωρία ουρών αναμονής

12.1 Εισαγωγή

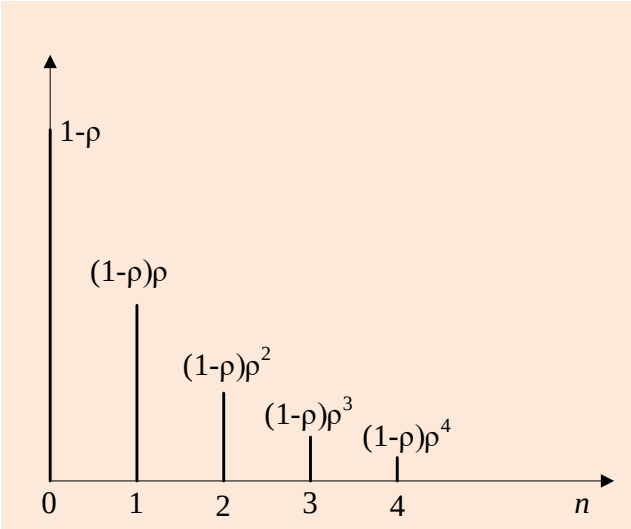
Οι ουρές ή γραμμές αναμονής είναι πολύ συνηθισμένες στην καθημερινή ζωή. Πολλές φορές πρέπει να περιμένουμε σε μια ουρά για ένα λεωφορείο, ένα ταξί, ένα εισιτήριο στον κινηματογράφο ή ένα κούρεμα. Το σύστημα "φρακάρει" και εμείς περιμένουμε. Οι περισσότεροι από εμάς σκέφτονται τη συμφόρηση και την αναμονή με περισσότερο ή λιγότερο χιούμορ. Κατά καιρούς, το μήκος μιας ουράς στην οποία εισερχόμαστε μας αποθαρρύνει και εγκαταλείπουμε την προσδοκώμενη δραστηριότητα.

Οι ουρές δημιουργούνται, όταν η τρέχουσα ζήτηση για μια εξυπηρέτηση είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα δυναμικότητα του συστήματος, που παρέχει τη δραστηριότητα. Οι αποφάσεις που σχετίζονται με τον προσδιορισμό της δυναμικότητας του συστήματος πολλές φορές είναι δύσκολες, επειδή συχνά είναι αδύνατο να προβλεφθεί επακριβώς πότε θα αφιχθούν μονάδες[1] στο σύστημα για να εξυπηρετηθούν και πόσος χρόνος θα χρειαστεί για την εξυπηρέτησή τους. Η ύπαρξη στο σύστημα μεγαλύτερης δυναμικότητας από αυτή που χρειάζεται, θα απαιτήσει μεγαλύτερο κόστος. Από την άλλη μεριά, αν είναι μικρότερη, θα δημιουργηθεί συνωστισμός και η ουρά θα μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου. Η ύπαρξη ουράς δημιουργεί και αυτή κόστος (σχήμα 12.1), όπως για παράδειγμα κοινωνικό κόστος, κόστος διαρροής πελατών, κόστος αχρησιμοποίητων πόρων κ.α.

Αντικειμενικός σκοπός είναι να βρεθεί μια οικονομική ισορροπία μεταξύ του κόστους εξυπηρέτησης και του κόστους που συνδέεται με την αναμονή γι' αυτή την εξυπηρέτηση. Η θεωρία ουρών αναμονής δε λύνει τα παραπάνω προβλήματα άμεσα, όμως δίνει την πληροφόρηση που χρειάζεται προσδιορίζοντας τα διάφορα χαρακτηριστικά του συστήματος.

---

[1] Οι αφίξεις ή μονάδες στο σύστημα μπορεί να είναι άνθρωποι που πρέπει να εξυπηρετηθούν, βιομηχανικές εργασίες, ροή εγγράφων (π.χ. αιτήσεις για πρωτοκόλληση), εξοπλισμός για επιδιόρθωση κ.α.



Σχήμα 12.8: Η λύση για το p_n στο σύστημα $(M\ /\ M\ /\ 1)$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα L είναι (για $\rho < 1$):

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n\right) \Rightarrow$$

$$L = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = (1-\rho)\rho\left(-\frac{\frac{d}{d\rho}(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\right) = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Άρα,

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{12.28}$$

Θεωρούμε ότι όλες οι αφίξεις είναι αποτελεσματικές (άλλωστε έχουμε άπειρη χωρητικότητα συστήματος), $\lambda_{eff} = \lambda$. Επομένως, έχουμε από τον τύπο του Little $L = \lambda W$ και τη βοήθεια του (12.28):

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho} \tag{12.29}$$

Συνεχίζοντας, υπολογίζουμε τα υπόλοιπα μέτρα απόδοσης του συστήματος:

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι ο συνολικός χρόνος W που καταναλώνει ο πελάτης στο σύστημα μείον το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης.

$$W_q = W - \mu_S = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)} \tag{12.30}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών σε αναμονή (στην ουρά) δίνεται πάλι από τον αντίστοιχο τύπο του Little (12.9):

$$L_q = \lambda W_q = \lambda\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)}\right) = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{12.31}$$

Εάν $\lambda \geq \mu$ που σημαίνει μέσο ρυθμό αφίξεων ίσο ή μεγαλύτερο του μέσου ρυθμού εξυπηρετήσεων, το άθροισμα στον τύπο υπολογισμού του p_0 δεν συγκλίνει και επομένως δεν υπάρχει λύση μονίμου καταστάσεως λειτουργίας του συστήματος αναμονής. Αυτό είναι εύλογο, διότι όταν ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι

μεγαλύτερος του μέσου ρυθμού εξυπηρετήσεων, είναι επόμενο να αυξάνεται απεριόριστα το μήκος της ουράς αναμονής.

12.9.2 Ανακεφαλαίωση για την περίπτωση ουράς (*M*/*M*/1)

$$\lambda_{eff} = \lambda_n = \lambda\ , \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

$$\mu_n = \mu\ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{2}$$

$$\mu_A = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

$$\mu_S = \frac{1}{\mu} \tag{4}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu_A}}{\frac{1}{\mu_S}} = \frac{\mu_S}{\mu_A} \tag{5}$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \tag{6}$$

$$p_n = (1-\rho)\rho^n\ , \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{7}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \overset{(5)}{=} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{8}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \overset{(8)}{=} \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho} \tag{9}$$

$$W_q = W - \mu_S = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{1-\rho} \overset{(5)}{=} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \overset{(8)}{=} \frac{L}{\mu} \tag{10}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{W_q}{\mu_A} \overset{(10)}{=} \frac{\rho^2}{1-\rho} \overset{(5)}{=} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \overset{(8)}{=} \rho L \tag{11}$$

$$\mathrm{WTM} = \frac{W_q}{\mu_S} \overset{(10)}{=} \frac{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{12}$$

Συνεπώς, ισχύουν ακόμα:

$$W_q \overset{(12)}{=} \mathrm{WTM}\cdot\mu_S \tag{13}$$

$$W = W_q + \mu_S \tag{14}$$

$$L \overset{(10)}{=} W_q\cdot\mu = \frac{W_q}{\mu_S} \tag{15}$$

$$c_{occ} = L - L_q = \rho \tag{16}$$

Η συνήθης πορεία για την επίλυση μιας άσκησης είναι η διαδοχική εφαρμογή των τύπων:

$$(3) \to (4) \to (5) \to (12) \to (13) \to (14) \to (15) \to (11).$$

Κεφάλαιο 13

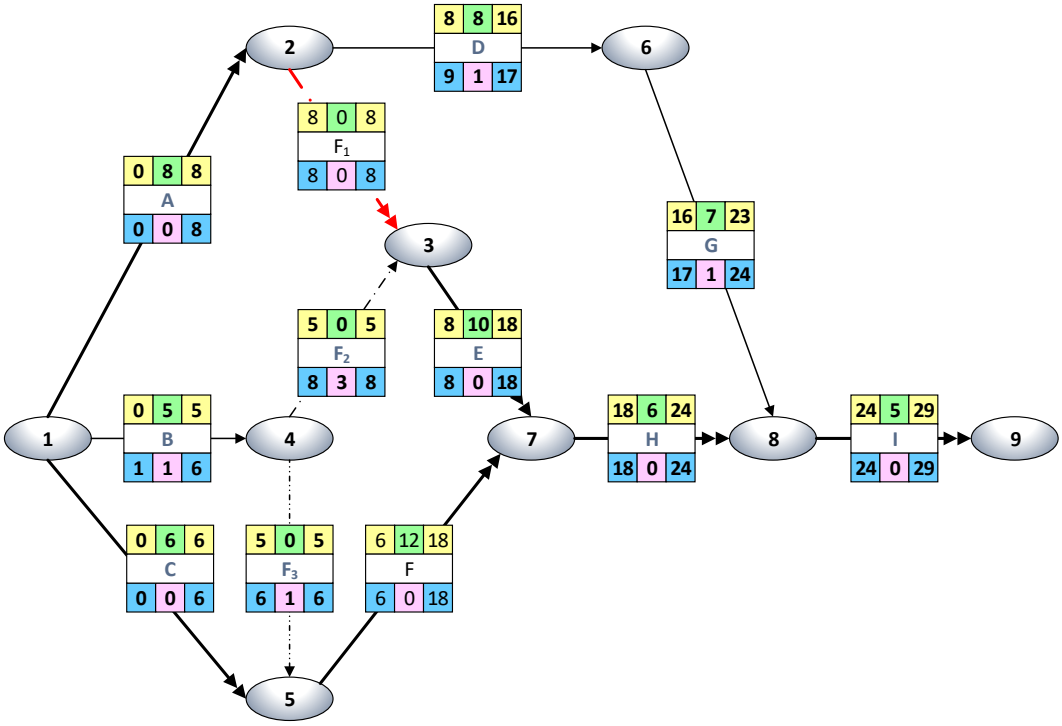
Διαχείριση Έργου (Project Management)

"Πρώτα, να έχεις μία σαφή ιδέα, ένα καθορισμένο ιδανικό, ένα αντικειμενικό σκοπό, ένα στόχο. Δεύτερον, να διαθέτεις τα απαραίτητα μέσα, τη σοφία, τα χρήματα, τα υλικά και τις μεθόδους. Τρίτον, να προσαρμόσεις τα μέσα που διαθέτεις για να πετύχεις τους στόχους σου"

Αριστοτέλης

"Those who plan do better than those who do not plan even though they rarely stick to their plan"

Winston Churchill



Σχήμα 13.36: Κρίσιμες διαδρομές του παραδείγματος υπόδειγμα

Διάγραμμα Gantt με βάση τους ενωρίτερους χρόνους έναρξης

Για μια δραστηριότητα ij με διάρκεια T_{ij} με βραδύτερο χρόνο πέρατος LF_{ij} και ενωρίτερο χρόνο πέρατος EF_{ij} και βραδύτερο χρόνο έναρξης LS_{ij} και ενωρίτερο χρόνο έναρξης ES_{ij} υπολογίζουμε το ολικό χρονικό περιθώριο TS_{ij} από τον τύπο:

$$TS_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij}$$

και το ελεύθερο χρονικό περιθώριο $\boldsymbol{FTS_{ij}}$ από τον τύπο:

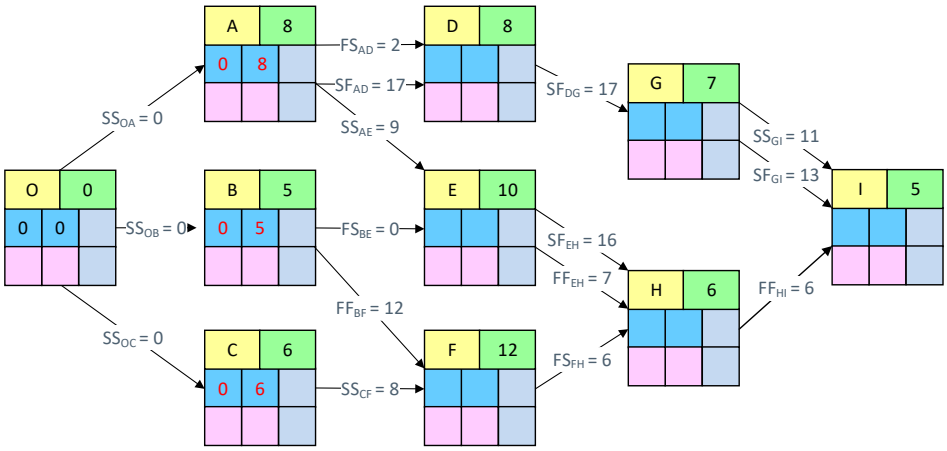
$$FTS_{ij} = \min_{jk \in K} ES_{jk} - EF_{ij},$$

όπου K το σύνολο των δραστηριοτήτων που ξεκινούν από τον κόμβο πέρατος j της δραστηριότητας ij.

Με την 2η μέθοδο CPM-δραστηριοτήτων και τους παραπάνω τύπους σχηματίζεται πάλι ο πίνακας 13.4 με τους αντίστοιχους χρόνους, καθώς και το Διάγραμμα 13.10 με το διάγραμμα Gantt του παραδείγματος υπόδειγμα.

Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα της μεθόδου CPM

Τα κυριότερα πλεονεκτήματα της CPM που συνέβαλαν και στην ταχύτερη καθιέρωσή της είναι (i) ότι δίνει μία παραστατική και εύληπτη εποπτεία της αλληλουχίας μεταξύ των κόμβων και των δραστηριοτήτων ενός έργου, αλλά κυρίως (ii) ότι είναι απλή στην επίλυσή της.



Σχήμα 13.40: Ομόρροπος υπολογισμός (2)

Για τη δραστηριότητα D που έχει μοναδική προηγούμενη δραστηριότητα την A αλλά συνδέεται με αυτήν με δύο σχέσεις αλληλουχίας, καθώς και για τις δραστηριότητες E και F που έχουν περισσότερες από μία προηγούμενες δραστηριότητες, υπολογίζουμε αντίστοιχα:

$$ES_D = \max\{EF_A + FS_{AD}, ES_A + SF_{AD} - T_D\} = \max\{8 + 2, 0 + 17 - 8\} = 10$$

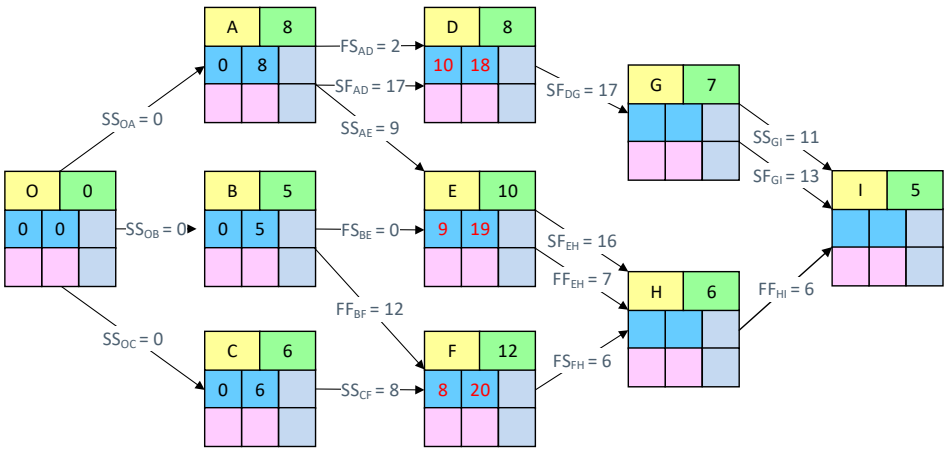
$$EF_D = ES_D + T_D = 10 + 8 = 18,$$

$$ES_E = \max\{ES_A + SS_{AE}, EF_B + FS_{BE}\} = \max\{0 + 9, 5 + 0\} = 9,$$

$$EF_E = ES_E + T_E = 9 + 10 = 19,$$

$$ES_F = \max\{EF_B + FF_{BF} - T_F, ES_C + SS_{CF}\} = \max\{5 + 12 - 12, 0 + 8\} = 8,$$

$$EF_F = ES_F + T_F = 8 + 12 = 20.$$



Σχήμα 13.41: Ομόρροπος υπολογισμός (3)

Η δραστηριότητα G έχει για προηγούμενη μόνο τη D και συνδέεται με αυτήν με μοναδική σχέση αλληλουχίας, αλλά η H έχει δύο προηγούμενες (και μάλιστα με μία από αυτές συνδέεται με διπλή σχέση αλληλουχίας:

Κεφάλαιο 14

Θεωρία Παιγνίων (Game Theory)

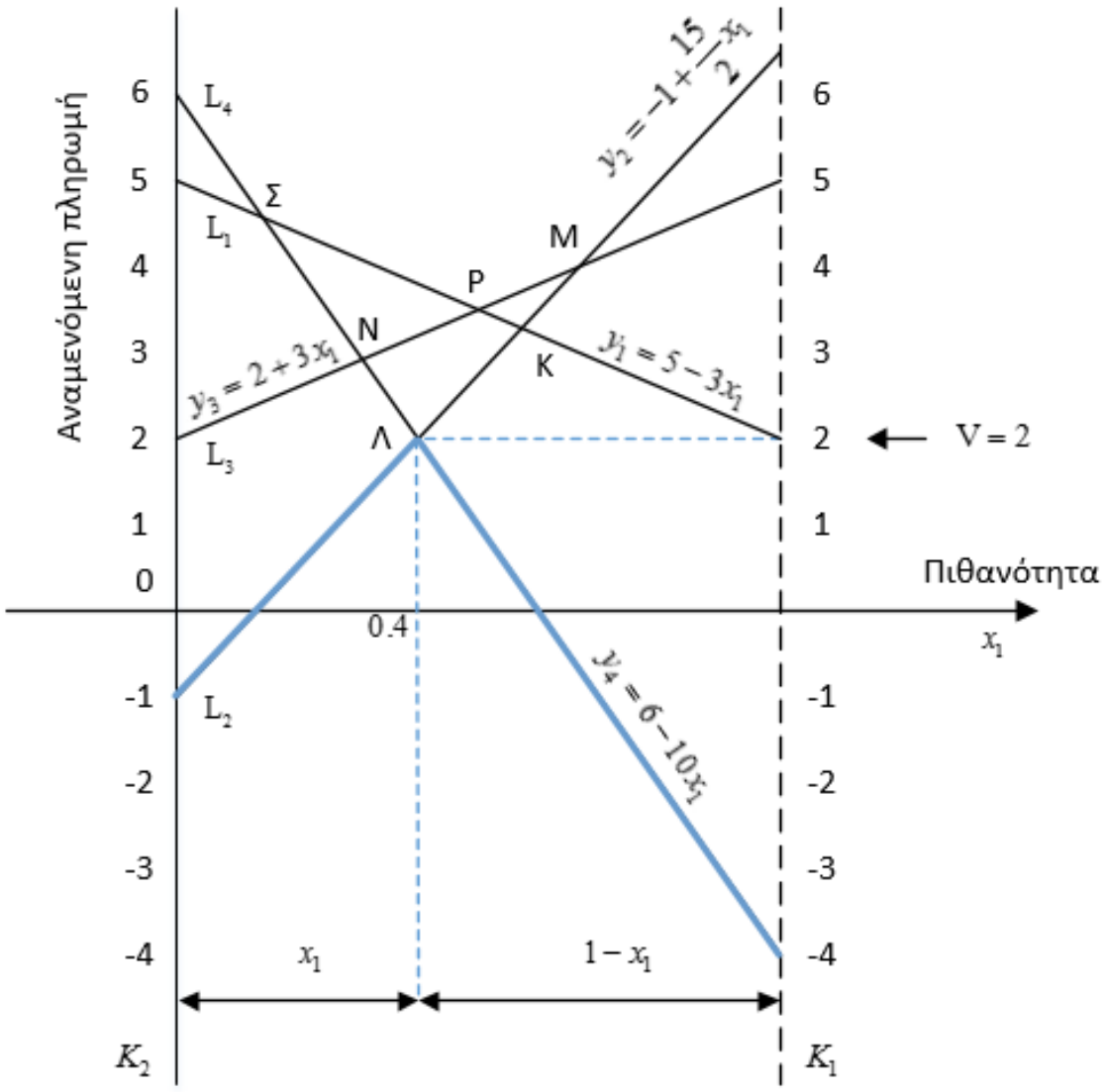
"The Best for the Group comes when everyone in the group does what's best for himself and the group"

"As you will find in multivariable calculus, there is often a number of solutions for any given problem"

John Forbes Nash, Jr.[1]

[1] John Forbes Nash, Jr. (1928 - 2015): Αμερικανός μαθηματικός, με τεράστια συνεισφορά στην ανάπτυξη της Θεωρίας Παιγνίων, τη Διαφορική Γεωμετρία και τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Το έργο του έδωσε ώθηση στην κατανόηση των παραγόντων που κυβερνούν την τυχαιότητα μέσα σε πολύπλοκα συστήματα στην καθημερινή ζωή. Για τη συνεισφορά του στην επιστήμη, έλαβε το Νόμπελ Οικονομίας (1944) μαζί με τους Reinhard Selten και John Harsanyi. Το 1959 εμφάνισε σημάδια πνευματικής διαταραχής και για πολλά χρόνια της ζωής του μεταφέρθηκε σε πληθώρα ψυχιατρικών κλινικών με διαγνωσμένη παρανοϊκή σχιζοφρένεια. Μετά το 1970, όπου η κατάσταση της υγείας του βελτιώθηκε, επέστρεψε στην ακαδημαϊκή κοινότητα. Σκοτώθηκε με τη σύζυγό του στις 23 Μάϊου 2015 σε αυτοκινητιστικό δυστύχημα στο New Jersey, επιστρέφοντας από τη Νορβηγία, όπου παρέλαβε το βραβείο Abel.

Στη συνέχεια εισάγουμε τις παραπάνω ευθείες αναμενόμενων πληρωμών στο Σχήμα 14.1. Στο σχήμα αυτό, ο άξονας x'x αναπαριστά την πιθανότητα x_1 να εφαρμόσει η εταιρεία K τη στρατηγική K_1 και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ Ο κατακόρυφος άξονας αναπαριστά την αναμενόμενη αξία πληρωμής για την εταιρεία K. Για παράδειγμα, αν η L εφαρμόσει τη στρατηγική L_1, τότε αν η μεικτή στρατηγική της K είναι $(x_1, x_2) = (1,0)$, η πληρωμή της K θα είναι 2 μονάδες και το σημείο στο οποίο αυτή αντιστοιχεί είναι το $(1,2)$. Όμοια, αν η μεικτή στρατηγική της K είναι $(x_1, x_2) = (0,1)$, η πληρωμή της K θα είναι 5 μονάδες και το σημείο στο οποίο αυτή αντιστοιχεί είναι το $(0,5)$. Σχεδιάζοντας την ευθεία με κορυφές τα παραπάνω σημεία προκύπτει η γραφική παράσταση της L_1: $y_1 = 5 - 3x_1$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν όλες οι ευθείες του σχήματος 14.1.



Σχήμα 14.1: Γραφική μέθοδος

Στο σχήμα δημιουργούνται συνολικά έξι γωνιακά σημεία, τα K, Λ, M, N, Σ και P. Για οποιεσδήποτε συγκεκριμένες τιμές των πιθανοτήτων $\{(x_1, 1 - x_1),\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)\}$, η αναμενόμενη αξία πληρωμής υπολογίζεται από το σταθμισμένο μέσο των τεσσάρων ευθειών:

$$E(K) = q_1y_1 + q_2y_2 + q_3y_3 + q_4y_4$$

$$E(K) = q_1(5 - 3x_1) + q_2\left(-1 + \frac{15}{2}x_1\right) + q_3(2 + 3x_1) + q_4(6 - 10x_1)$$

Η εταιρεία L επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει την αναμενόμενη πληρωμή της K. Για το λόγο αυτό, θα επιλέξει μία εκ των στρατηγικών L_2 και L_4, που αντιστοιχούν στις ευθείες y_2 και y_4 που βρίσκονται στο κάτω μέρος του σχήματος και θα απορρίψει παντελώς τις στρατηγικές L_1 και L_3, που αντιστοιχούν στις ευθείες y_1 και y_3. Στη συνέχεια, η εταιρεία K εφαρμόζοντας το κριτήριο maximin θα υπολογίσει το μέγιστο από τις κατώτερες ευθείες πληρωμών. Δηλαδή, η K θα επιλέξει την τιμή x_1 έτσι ώστε:

$$E(K) = \max_{0 \le x_1 \le 1}\left\{min\left\{5 - 3x_1,\ -1 + \frac{15}{2}x_1,\ 2 + 3x_1,\ 6 - 10x_1\right\}\right\}$$

Αυτό το μέγιστο από τις ελάχιστες αναμενόμενες αποδόσεις, επιτυγχάνεται στο σημείο τομής Λ(0.4,2) των δύο ευθειών y_2 και y_4. Λύνοντας το σύστημα, έχουμε:

$$y_2 = y_4 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + \frac{15}{2}x_1 = 6 - 10x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{14}{35} = 0.4$$

Δηλαδή, η εταιρεία K θα χρησιμοποιεί τη στρατηγική K_1 με πιθανότητα 40% και τη στρατηγική K_2 με πιθανότητα 60%.

Επομένως, η βέλτιστη μεικτή στρατηγική για την εταιρεία K είναι $(x_1, x_2) = (x_1, 1 - x_1) = (0.4,0.6)$ που αντιστοιχεί σε τιμή αναμενόμενης πληρωμής $E(K) = -1 + \frac{15}{2} \cdot 0.4 = 2$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη βέλτιστη μεικτή στρατηγική της εταιρείας L, χρησιμοποιώντας το minimax κριτήριο. Σύμφωνα με το maximin – minimax θεώρημα, η αναμενόμενη τιμή για τη βέλτιστη στρατηγική $\{(L_1, q_1), (L_2, q_2), (L_3, q_3), (L_4, q_4)\}$ θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$q_1(5 - 3x_1) + q_2\left(-1 + \frac{15}{2}x_1\right) + q_3(2 + 3x_1) + q_4(6 - 10x_1) \le E(L) = 2 \qquad (14.8)$$

για κάθε τιμή της $x_1 \in [0,1]$. Επιπλέον, όταν η εταιρεία K επιλέξει τη βέλτιστη μεικτή στρατηγική της υπολογίστηκε ότι $x_1 = 0.4$και η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται ως ισότητα, δηλαδή:

$$3.8q_1 + 2q_2 + 3.2q_3 + 2q_4 = 2$$

$$1.8q_1 + 1.2q_3 + 2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = 2$$

Ακόμα, ισχύει ότι:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

Άρα,

$$1.8q_1 + 1.2q_3 + 2 \cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 1.8q_1 + 1.2q_3 = 0$$

Και επειδή $q_1,\ q_3 \ge 0$, θα έχουμε:

Κεφάλαιο 15

Μοντέλα Δικτύων (Network models)

"A few generations ago, people didn't have a way to share information and express their opinions efficiently to a lot of people. But now they do. Right now, with social networks and other tools on the Internet, all of these 500 million people have a way to say what they're thinking and have their voice be heard"

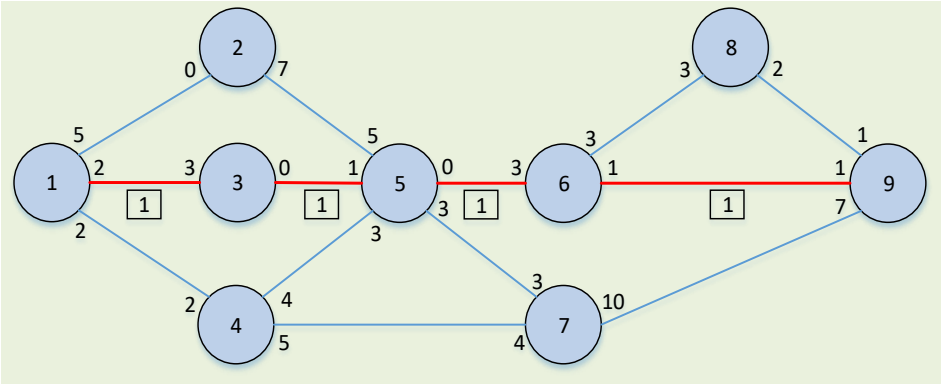
Mark Zuckerberg[1]

"A journey of a thousand miles begins with a single step"

Confucius[2]

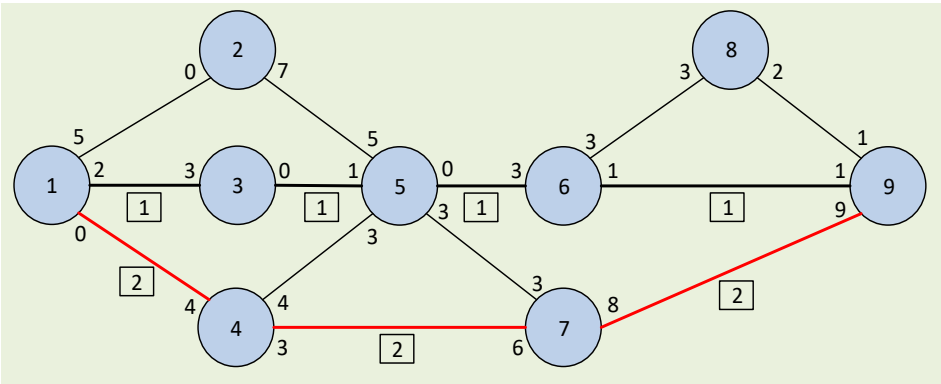
[1] Αμερικανός προγραμματιστής, επιχειρηματίας, φιλάνθρωπος. Γεννήθηκε το 14 Μαϊου 1984. Είναι συνιδρυτής του Facebook, ενός website κοινωνικής δικτύωσης.

[2] Κινέζος δάσκαλος, πολιτικός και φιλόσοφος (551 π.Χ – 479 π.Χ).



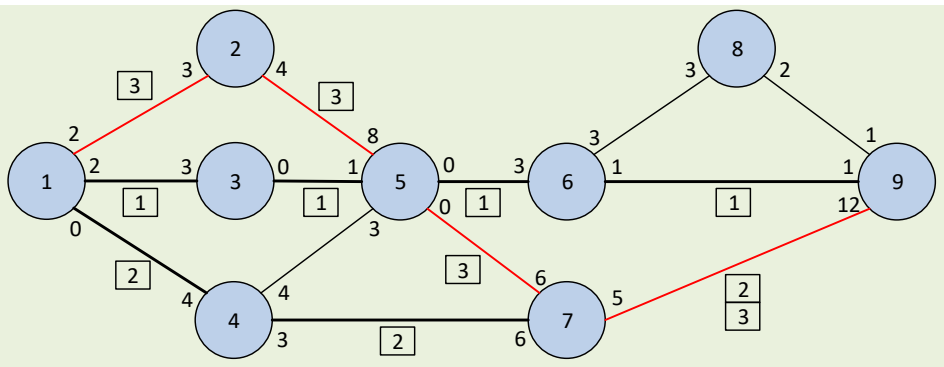
Σχήμα 15.9

Ένα νέο μονοπάτι μη μηδενικής ροής είναι το $1 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{5} 7 \xrightarrow{10} 9$. Η ακμή με τη μικρότερη δυναμικότητα είναι η $1 \xrightarrow{2} 4$ που καθορίζει ότι η ροή του μονοπατιού θα είναι 2 μονάδες. Το δίκτυο γράφεται:



Σχήμα 15.10

Η δυναμικότητα της ακμής $1 \xrightarrow{2} 3$ που είναι πλέον 2 μονάδες δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί η μοναδική επόμενη ακμή $3 \xrightarrow{0} 5$ έχει μηδενική δυναμικότητα. Επίσης, η δυναμικότητα της ακμής $1 \xrightarrow{0} 4$ έχει μηδενιστεί. Επομένως, μπορούμε να έχουμε ροή από την πηγή μόνο μέσω της ακμής $1 \xrightarrow{5} 2$. Επιλέγουμε το μονοπάτι $1 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{7} 5 \xrightarrow{3} 7 \xrightarrow{8} 9$, που λόγω της ακμής $5 \xrightarrow{3} 7$, περιορίζεται η δυναμικότητά του σε 3 μονάδες. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο, λαμβάνουμε το δίκτυο του σχήματος 15.11.



Σχήμα 15.11

16.2 Χαρακτηριστικά των εφαρμογών του Δυναμικού Προγραμματισμού

Χαρακτηριστικό 1

Το πρόβλημα χωρίζεται σε στάδια. Ευρισκόμενος κάποιος σε ένα στάδιο χρειάζεται να λάβει μόνο μία απόφαση κάθε φορά για το ποιο θα είναι το βέλτιστο επόμενο στάδιο. Αυτό σημαίνει ότι η λύση του προβλήματος είναι μία επιλογή από διαδοχικές αποφάσεις, μία για κάθε στάδιο.

Χαρακτηριστικό 2

Κάθε στάδιο αποτελείται από έναν αριθμό καταστάσεων που μπορεί να είναι πεπερασμένες ή άπειρες. Οι καταστάσεις του κάθε σταδίου δίνουν μια πλήρη περιγραφή του συστήματος όταν βρεθεί σε αυτό το στάδιο.

Χαρακτηριστικό 3

Για να ληφθεί η σωστή απόφαση σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο στάδιο δε χρειάζεται να γνωρίζουμε το πως φτάσαμε σε αυτό το στάδιο. Δηλαδή, η μελλοντικές αποφάσεις μας δεν επηρεάζονται από το παρελθόν (πώς βρεθήκαμε στην τρέχουσα κατάσταση), αλλά μόνο από το παρόν (ποια είναι η τρέχουσα κατάσταση). Η απόφαση σε κάθε στάδιο περιγράφει **πως** η κατάσταση στο τρέχον στάδιο μετατρέπεται στην κατάσταση του επόμενου σταδίου. Είναι πιθανό, μια απόφαση να μην καθορίζει ακριβώς την κατάσταση του επόμενου σταδίου, αλλά να δίνει την κατανομή πιθανότητας της κατάστασης στο επόμενο στάδιο.

Αρχή Βελτιστότητας
(Bellman's principle of optimality)

Ο Richard Ernest Bellman γεννήθηκε το 1920 από γονείς Εβραίους ρωσσο-πολωνικής καταγωγής. Έλαβε master στα Μαθηματικά από το πανεπιστήμιο του Wisconsin (1941) και το διδακτορικό του από το Princeton (1946), υπό την επίβλεψη του Solomon Lefschetz (αλγεβρική τοπολογία και μη-γραμμικές ODE's).

Richard Ernest Bellman (1920-1984)

Από το 1949 και για πολλά χρόνια εργάστηκε στη RAND, αναπτύσσοντας τον Δυναμικό Προγραμματισμό (1953). Διετέλεσε Καθηγητής στο πανεπιστήμιο Southern California. Ήταν μέλος της National Academy of Engineering (1977) και της National Academy of Sciences (1983) και του IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers). Έλαβε το Medal of Honor (1979) για τη δημιουργία του Δυναμικού προγραμματισμού και τις εφαρμογές του. Διατύπωσε την αρχή βελτιστότητας, σύμφωνα με την οποία:
"Σε προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού, όταν λύνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός σταδίου, η λύση είναι βέλτιστη για το ίδιο αλλά και για τα στάδια που θα λυθούν στη συνέχεια, ανεξάρτητα από τις λύσεις που έδωσαν τα προβλήματα των οποίων η επίλυση έχει προηγηθεί".
Έγινε επίσης γνωστός για τον αλγόριθμο Bellman-Ford, για τον υπολογισμό της ελάχιστης διαδρομής σε ένα δίκτυο, όπου τα κόστη κάποιων διαδρομών είναι δυνατό να είναι αρνητικά τη στιγμή που ο αλγόριθμος Dijkstra (παράγραφος 15.4.1) λύνει το ίδιο πρόβλημα σε μικρότερο υπολογιστικό χρόνο, αλλά με την παραδοχή ότι τα κόστη σε όλες τις ακμές του δικτύου είναι μη-αρνητικά..

Χαρακτηριστικό 4

Για δεδομένο τρέχον στάδιο, η βέλτιστη απόφαση για το επόμενο στάδιο δεν εξαρτάται από τις προηγούμενες καταστάσεις που επιλέχθηκαν ή τις προηγούμενες αποφάσεις που πάρθηκαν. Αυτό λέγεται "**Αρχή της βελτιστότητας**". Η Αρχή βελτιστότητας του Δυναμικού Προγραμματισμού διατυπώνεται ως εξής:

Βάσει της παραπάνω αναδρομικής σχέσης σχηματίζουμε τον πίνακα απόφασης για το 3ο στάδιο (Πίνακας 16.10).

	$f_3(s_3, x_3) = p_3(x_3) \cdot F_4(s_3 - x_3)$									$F_3(s_3)$	x_3^{opt}
s_3 \ x_3	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**		
0	1x1 =1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	0
1	1x0.6 =0.06	0.7x1 =0.7	-	-	-	-	-	-	-	0.6	0
2	1x0.45 =0.45	0.7x0.6 =0.42	0.5x1 =0.5	-	-	-	-	-	-	0.42	1
3	1x0.35 =0.35	0.7x0.45 =0.315	0.5x0.6 =0.3	0.4x1 =0.4	-	-	-	-	-	0.3	2
4	1x0.25 0.25	0.7x0.35 =0.245	0.5x0.45 =0.225	0.4x0.6 =0.24	0.3x1 =0.3	-	-	-	-	0.225	2
5	1x0.1 =0.1	0.7x0.25 =0.175	0.5x0.35 =0.175	0.4x0.45 =0.18	0.3x0.6 =0.18	0.2x1 =0.2	-	-	-	0.175	1 ή 2
6	1x0.04 =0.04	0.7x0.1 =0.07	0.5x0.25 =0.125	0.4x0.35 =0.14	0.3x0.45 =0.135	0.2x0.6 =0.12	0.1x1 =0.1	-	-	0.04	0
7	1x0.03 =0.03	0.7x0.04 =0.028	0.5x0.1 =0.05	0.4x0.25 =0.1	0.3x0.35 =0.105	0.2x0.45 =0.09	0.1x 0.6 =0.06	0.05x1 =0.05	-	0.03	0
8	1x0.02 =0.02	0.7x0.03 =0.014	0.5x0.04 =0.02	0.4x0.1 =0.04	0.3x0.25 =0.075	0.2x0.35 =0.07	0.1x0.45 =0.045	0.05x0.6 =0.03	0.04x1 =0.04	0.02	0 ή 2

Πίνακας 16.10: Πίνακας 3ου σταδίου

Υπολογισμοί 2ου σταδίου

Συνεχίζουμε τη διαδικασία οπισθοδρομικά για να εξετάσουμε το πρόβλημα του σταδίου 2, όπου μπορούμε να εκχωρήσουμε τα κάτοπτρα που διαθέτουμε στο στάδιο αυτό στα panels 2, 3 και 4.

Συγκεκριμένα, αν s_2 κάτοπτρα δεν έχουν χρησιμοποιηθεί για το 1ο panel, τότε εκχωρούμε x_2 από αυτά στο 2ο panel και απομένουν $s_3 = s_2 - x_2$ προς διάθεση στο 3ο και 4ο panel.

Για τις διάφορες τιμές του x_2 η προσδοκώμενη απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$f_2(s_2, x_2) = p_2(x_2) \cdot F_3(s_2 - x_2)$$

και η αναδρομική σχέση για τη συνολικά βέλτιστη πολιτική του 2ου σταδίου ορίζεται ως:

$$F_2(s_2) = \min_{0 \le x_2 \le s_2} \left(p_2(x_2) \cdot F_3(s_2 - x_2)\right).$$

Βάσει της παραπάνω αναδρομικής σχέσης σχηματίζουμε τον πίνακα απόφασης για το 2ο στάδιο (Πίνακας 16.11).

Κεφάλαιο 17

Πρόβλεψη (Forecasting)

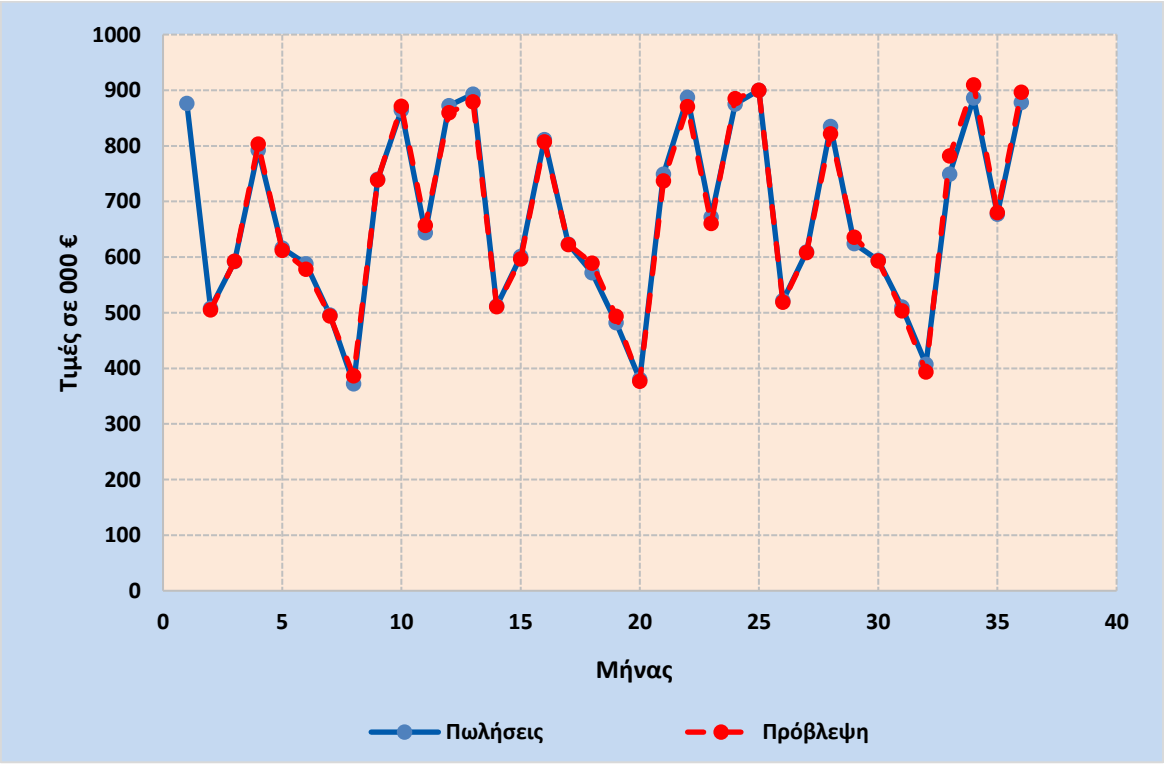
17.1 Εισαγωγή

Η ικανότητα πρόβλεψης είναι συχνά κρίσιμος παράγοντας για την επιτυχία μιας επιχείρησης. Οι σωστές προβλέψεις μπορούν να επηρεάσουν τα διαφορετικά τμήματα μιας εταιρείας, όπως το τμήμα παραγωγής, πωλήσεων, εμπορίας & διαφήμισης, κ.τ.λ., ώστε να συνεργάζονται αρμονικά. Ας σκεφτούμε ποιο θα ήταν το αποτέλεσμα αν το τμήμα παραγωγής μιας εταιρείας προγραμμάτιζε την κατασκευή 200,000 κομματιών από ένα δημοφιλές προϊόν της εταιρείας, το τμήμα εμπορίας & διαφήμισης σχεδίαζε μια καμπάνια για την πώληση 500,000 κομματιών, το τμήμα διανομής ανέπτυσσε ένα δίκτυο για την προώθηση 100,000 κομματιών και το οικονομικό τμήμα χρηματοδοτούσε την αγορά πρώτων υλών για την κατασκευή 50,000 κομματιών.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διαπραγματευτούμε διάφορες μεθοδολογίες για τη δημιουργία επιτυχών προβλέψεων. Η προσέγγιση που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι ποσοτική και θα αποδειχθεί ιδιαίτερα επιτυχημένη όταν χρησιμοποιούνται δεδομένα για τη ζήτηση, τη μεταφορά, τις παραγγελίες, κ.τ.λ. που έχουν συλλεχθεί στο παρελθόν και επομένως είναι ρεαλιστικά και αξιόπιστα. Οι προβλέψεις της μελλοντικής ζήτησης, για παράδειγμα, είναι ιδιάζουσας σημασίας όταν πρόκειται για συστήματα ελέγχου αποθεμάτων (βλ. Κεφάλαιο 11) ή αντικατάστασης εξοπλισμού (βλ. Κεφάλαιο 16). Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε μεθόδους πρόβλεψης χρονικών σειρών που χρησιμοποιούν δεδομένα από το παρελθόν για να εκτιμήσουν τις αντίστοιχες τιμές στο μέλλον. Αρχικά, θα θεωρήσουμε κινητούς μέσους όρους και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε μία τεχνική που έχει επικρατήσει να ονομάζεται “Εκθετική Εξομάλυνση”. Αυτή η τεχνική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την πρόβλεψη των πωλήσεων ενός προϊόντος σε βάθος χρόνου. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή της Ανάλυσης Παλινδρόμησης (Regression Analysis) στις προβλέψεις. Η παλινδρόμηση είναι μία στατιστική τεχνική που εφαρμόζεται σε προβλέψεις, όπου οι τιμές εμφανίζουν μία έντονη συσσωμάτωση σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους (π.χ. εμφανίζεται ένας τετραμηνιαίος κύκλος πωλήσεων ενός προϊόντος) ή ακόμα όταν πρόκειται να κάνουμε πρόβλεψη για τις

28	Απρίλιος	624	683.167	1.339	0.921	635.766	11.766
29	Μάϊος	594	684.815	1.401	0.867	593.106	-0.894
30	Ιούνιος	510	688.952	1.948	0.736	503.311	-6.689
31	Ιούλιος	407	697.929	3.354	0.575	393.651	-13.349
32	Αύγουστος	749	692.414	1.580	1.102	781.963	32.963
33	Σεπτέμβριος	886	688.529	0.487	1.301	909.884	23.884
34	Οκτώβριος	677	688.023	0.288	0.986	680.267	3.267
35	Νοέμβριος	878	684.050	-0.564	1.295	896.504	18.504
36	Δεκέμβριος	508	661.865	1.461	0.766	505.019	-2.981

Πίνακας 17.9: Πρόβλεψη εκθετικής εξομάλυνσης με προσθήκη γραμμικής τάσης και ενσωμάτωση δεικτών εποχικότητας



Διάγραμμα 17.6: Πωλήσεις και πρόβλεψη με τη χρήση εκθετικής εξομάλυνσης με ενσωμάτωση της γραμμικής τάσης και με τη χρήση εποχικών δεικτών

Συνοψίζοντας, είδαμε ότι η εκθετική εξομάλυνση μας παρέχει ένα μηχανιστικό τρόπο να δημιουργήσουμε προβλέψεις από προηγούμενα δεδομένα. Το απλό βασικό μοντέλο πρόβλεψης μπορεί να επεκταθεί και να ενσωματώσει μια δεύτερη εξίσωση που να χειρίζεται τη γραμμική τάση καθώς και ένα τρίτο σύνολο συντελεστών που να λαμβάνουν υπόψιν τους την εποχική διακύμανση των τιμών. Η σύνθετη αυτή μέθοδος αποδεικνύεται πολύ αποτελεσματική για περιπτώσεις όπου εμπλέκεται μεγάλος αριθμός δεδομένων για πληθώρα προϊόντων και απαιτείται η κατασκευή προβλέψεων με αυτοματοποιημένο τρόπο.