**Κεφάλαιο 2****: Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού**

### Άλυτες ασκήσεις

1. Οι πελάτες μιας εταιρείας κοπής συσκευασίας και πώλησης ρολών αλουμινίου δύνανται να παραγγείλουν ρολά αλουμινίου πλάτους 60cm, 50cm, 30cm και 20cm. Τα ρολά αλουμινίου παράγονται από την εταιρεία Αλουμίνιο της Ελλάδος σε πλάτος 145cm του μέτρου και κόβονται από την εταιρεία σε μικρότερα πλάτη σύμφωνα με τις μεθόδους κοπής, που φαίνονται στον πίνακα 2.8:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Μέθοδος κοπής** | | | | | | | | | | | |
| **Πλάτος (cm)** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| 60 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 50 |  | 1 |  |  |  | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 30 |  |  | 1 | 2 |  | 1 |  | 2 | 1 |  | 4 | 2 |
| 20 | 1 | 1 | 2 | 1 | 4 |  | 2 | 1 | 3 | 4 | 1 | 4 |
| **Απώλεια** | 5 | 15 | 15 | 5 | 5 | 15 | 5 | 15 | 5 | 15 | 5 | 5 |

**Πίνακας** **2.8**

|  |  |
| --- | --- |
| **Πλάτος** | **Παραγγελίες**  **σε ρολά** |
| **60cm** | 560 |
| **50cm** | 320 |
| **30cm** | 850 |
| **20cm** | 180 |

**Πίνακας** **2.9**

Για παράδειγμα, με την μέθοδο κοπής Νο 3 από ένα ρολό πλάτους 1.45m κόβονται 1 ρολό πλάτους 60cm, 1 ρολό πλάτους 30cm, και 2 ρολά πλάτους 20cm έχοντας και μια απώλεια 15cm, καθώς με τις παραπάνω μεθόδους κοπής πολύ συχνά δημιουργούνται άχρηστα υπολείμματα (ρετάλια). Όλες οι παραγγελίες του τρέχοντος μηνός για τα συγκεκριμένα πλάτη φαίνονται στον πίνακα 2.9.

Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού προκειμένου να **ελαχιστοποιούνται** οι απώλειες. 

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π., Σεπτέμβριος 2011)

1. Να γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος της προηγούμενης άσκησης, για την περίπτωση που ζητείται να ελαχιστοποιηθεί το πλήθος των ρολών αλουμινίου που θα χρησιμοποιηθούν, ώστε να ικανοποιηθεί πλήρως η ζήτηση.
2. Θέλουμε να επιλέξουμε μία στρατηγική διαφήμισης προκειμένου να προσεγγίσουμε δύο κατηγορίες καταναλωτών: καταναλωτές που το ετήσιο οικογενειακό τους εισόδημα υπερβαίνει τα 15,000 € και άλλους με ετήσιο οικογενειακό εισόδημα κατώτερο των 15,000 €. Από προηγούμενες έρευνές μας γνωρίζουμε ότι πελάτες από τη πρώτη ομάδα αγοράζουν διπλάσια ποσότητα προϊόντων μας, σε σχέση με τους πελάτες μας από τη δεύτερη ομάδα.

Επιδίωξή μας είναι να μεγιστοποιήσουμε τις πωλήσεις μας. Μπορούμε να διαφημιστούμε **είτε** στη Τηλεόραση **είτε** σε Περιοδικά.

* Μια διαφήμιση στην Τηλεόραση κοστίζει 20,000 € και προσεγγίζει περίπου 20.000 άτομα της πρώτης ομάδας και 40,000 άτομα της δεύτερης ομάδας.
* Μια διαφήμιση σε περιοδικό κοστίζει 12,000 € και προσεγγίζει 30,000 άτομα της πρώτης ομάδας και 15,000 άτομα της δεύτερης.
* Ζητάμε από τον υπεύθυνο Διαφημιστικού της εταιρείας μας να κάνει τουλάχιστον 5 διαφημίσεις στη Τηλεόραση **και** όχι περισσότερες από 10 διαφημίσεις σε περιοδικά, γιατί αυτό υπαγορεύει η πολιτική της εταιρείας μας.
* Για διαφήμιση διαθέτουμε συνολικά 180,000 € (Advertising budget).

Να μορφοποιήσετε το παραπάνω πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (LP), ορίζοντας κάθε μεταβλητή που θα χρησιμοποιήσετε.

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π., Σεπτέμβριος 2009)

1. Η εταιρεία Gloman παράγει 4 είδη προϊόντων: Α, Β, Γ, Δ. Κάθε μονάδα προϊόντος Α απαιτεί 2 ώρες φρεζαρίσματος, 1 ώρα συναρμολόγησης και χρειάζεται για την κατασκευή της υλικά αξίας 10 €. Κάθε μονάδα προϊόντος Β απαιτεί 1 ώρα φρεζαρίσματος, 3 ώρες συναρμολόγησης και χρειάζεται για την κατασκευή της υλικά αξίας 5 €. Κάθε μονάδα προϊόντος Γ απαιτεί 2.5 ώρες φρεζαρίσματος, 2.5 ώρες συναρμολόγησης και χρειάζεται για την κατασκευή της υλικά αξίας 2 €. Τέλος, κάθε μονάδα προϊόντος Δ απαιτεί 5 ώρες φρεζαρίσματος, καθόλου ώρες συναρμολόγησης και χρειάζεται για την κατασκευή της υλικά αξίας 12 €.

Η εταιρεία διαθέτει 1,200 ώρες φρεζαρίσματος και 1,600 ώρες συναρμολόγησης τον μήνα. Επιπροσθέτως, δεν μπορεί να διαθέσει περισσότερα από 10,000 € το μήνα για την αγορά πρώτων υλών. Κάθε μονάδα προϊόντος Α αποφέρει κέρδος 40 €, κάθε μονάδα προϊόντος Β αποφέρει κέρδος 24 €, κάθε μονάδα προϊόντος Γ αποφέρει κέρδος 36 € και κάθε μονάδα προϊόντος Δ αποφέρει κέρδος 23 €. Μηνιαίως δεν είναι δυνατόν να απορροφηθούν από την αγορά περισσότερες από 200 μονάδες προϊόντος Α. Ακόμα, δεν μπορούν να πουληθούν πάνω από 160 μονάδες προϊόντος Γ, ενώ μπορεί να πουληθεί απεριόριστη ποσότητα μονάδων από τα προϊόντα Β και Δ. Η εταιρεία έχει μέσω συμβολαίου αναλάβει τη δέσμευση να πουλάει 100 μονάδες προϊόντος Δ τον μήνα σε συγκεκριμένο πελάτη της.

Η εταιρεία επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα μηνιαία κέρδη της, μέσω της παραγωγής και πώλησης των 4 προϊόντων της. Να γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος. 

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π., Φεβρουάριος 2009)

1. Εταιρεία συναρμολόγησης ηλεκτρονικών υπολογιστών αντιμετωπίζει το δίλημμα αν θα πρέπει το προσωπικό της να δουλέψει υπερωριακά ή όχι. Όταν το προσωπικό δουλεύει στο κανονικό του ωράριο, η συναρμολόγηση κάθε υπολογιστή κοστίζει στην εταιρεία 5 € και η συνολική ικανότητα παραγωγής είναι 60 κομμάτια την ημέρα. Αν μία μέρα αποφασιστεί το προσωπικό να εργαστεί υπερωριακά, τότε μπορεί να παράγονται επιπλέον 20 κομμάτια και το κόστος συναρμολόγησης ανεβαίνει σε 7 € ανά υπολογιστή.

Το κόστος των υλικών είναι 270 € και είναι το ίδιο είτε ο υπολογιστής συναρμολογηθεί στο κανονικό ωράριο είτε σε καθεστώς υπερωρίας. Η τιμή πώλησης ενός υπολογιστή είναι 300 € και η εταιρεία μπορεί να διαθέσει στην αγορά μέχρι 1,500 υπολογιστές το μήνα. Τα πάγια έξοδα της εταιρείας κάθε ημέρα είναι 1,200 € εκτός εάν αποφασιστεί εκείνη την ημέρα να εργαστεί το προσωπικό υπερωριακά, οπότε το κόστος ανέρχεται σε 1,600 €.

Να γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος, ώστε να υπολογίζεται ένα βέλτιστο πλάνο παραγωγής που να μεγιστοποιεί τα κέρδη της εταιρείας (Να θεωρηθεί μήνας 22 εργάσιμων ημερών).

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π., Φεβρουάριος 2012)

1. Μία τράπεζα θέλει να προγραμματίσει τις δραστηριότητες της για τον επόμενο χρόνο. Η τράπεζα προσφέρει πέντε τύπους δανείων, οι οποίοι δίνονται στον πίνακα 2.10 μαζί με την ετήσια απόδοση στην τράπεζα.

Περιορισμοί από το νόμο και η πολιτική της τράπεζας θέτουν τα ακόλουθα όρια στα ποσά των διάφορων τύπων δανείων.

Τα προσωπικά δάνεια δεν μπορούν να ξεπεράσουν το 10% του συνολικού ποσού των δανείων. Το ποσό των προσωπικών δανείων και των δανείων για την αγορά εξοπλισμού δεν μπορεί να ξεπεράσει το 20% του συνολικού ποσού των δανείων. Το ποσό για τα δάνεια με υποθήκη πρώτης κατοικίας πρέπει να είναι τουλάχιστον το 40% του συνόλου των υποθηκών και το λιγότερο το 20% του συνολικού ποσού των δανείων. Το ποσό για τα δάνεια με υποθήκη δεύτερης κατοικίας δεν μπορούν να υπερβούν το 25% του συνολικού ποσού των δανείων.

|  |  |
| --- | --- |
| **Τύποι Δανείων** | **Ετήσια απόδοση**  **(%)** |
| Προσωπικά δάνεια  Δάνεια για την αγορά εξοπλισμού  Δάνεια για την αγορά αυτοκινήτου  Δάνεια με υποθήκη δεύτερης Κατοικίας  Δάνεια με υποθήκη πρώτης Κατοικίας | 15  12  9  10  7 |

**Πίνακας** **2.10**

Η τράπεζα επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα έσοδα από τους τόκους των δανείων, βάσει των ανωτέρω περιορισμών. Η τράπεζα μπορεί να δανείσει το μέγιστο 2 εκατομμύρια €.

Μοντελοποιήστε το πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, χωρίς να το επιλύσετε.

1. Μία εταιρεία πουλάει δύο διαφορετικά προϊόντα Α και Β. Η τιμή πώλησης, το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος δίνονται στον πίνακα 2.11.

Τα δύο προϊόντα παράγονται με κοινή διαδικασία παραγωγής και πωλούνται σε δύο διαφορετικά καταστήματα. Η διαδικασία παραγωγής έχει δυνατότητα 30,000 ωρών εργασίας ετησίως. Απαιτούνται 3 ώρες να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος Α και 1 ώρα να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος Β. Μετά από επιθεώρηση των καταστημάτων, η εταιρεία πιστεύει πως ο μέγιστος αριθμός μονάδων των προϊόντων που μπορούν να πωληθούν είναι 8,000 μονάδες προϊόντος Α και 12,000 μονάδες προϊόντος Β ετησίως. Τηρουμένων αυτών των περιορισμών, τα προϊόντα μπορούν να πουληθούν σε οποιοδήποτε συνδυασμό.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Προϊόν Α**  **(σε €)** | **Προϊόν Β**  **(σε €)** |
| **Τιμή πώλησης**  **Μοναδιαίο κόστος**  **Μοναδιαίο κέρδος** | 60  30  30 | 40  10  30 |

**Πίνακας** **2.11**

Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, χωρίς να το επιλύσετε.

1. Μία εταιρεία παράγει μεγάλους ηλεκτρικούς μετασχηματιστές. Η εταιρεία έχει παραγγελίες (πίνακας 2.12) για τους επόμενους έξι μήνες. Το κόστος κατασκευής ενός μετασχηματιστή αναμένεται να ποικίλει κατά τη διάρκεια των επόμενων μηνών λόγω των αλλαγών στα κόστη υλικών και στα κόστη εργασίας. Η εταιρεία μπορεί να παράγει έως 50 μονάδες το μήνα στην κανονική διάρκεια εργασίας και ακόμα 20 μονάδες το μήνα αν γίνουν υπερωρίες. Τα κόστη για την κανονική διάρκεια εργασίας και για τις υπερωρίες δίνονται επίσης στον πίνακα 2.12.

Κάθε μετασχηματιστής που παραμένει απούλητος στο τέλος ενός μήνα μεταφέρεται στην αρχή του επόμενου, με ένα κόστος 500 €. Η εταιρεία έχει 15 μετασχηματιστές σε απόθεμα την 1η Ιανουαρίου και επιθυμεί να μην έχει λιγότερους από 5 μετασχηματιστές σε απόθεμα στις 30 Ιουνίου.

Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ώστε να καθορίσετε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Μήνες** | | | | | |
|  | **Ιαν.** | **Φεβ.** | **Μαρ.** | **Απρ.** | **Μάιος** | **Ιουν.** |
| **Παραγγελίες  (σε μονάδες)** | 60 | 35 | 35 | 70 | 70 | 45 |
| **Κόστος ανά μονάδα που παράγεται στην κανονική διάρκεια εργασίας (σε χιλ. €)** | 18 | 17 | 17 | 18 | 19 | 19 |
| **Κόστος ανά μονάδα που παράγεται στις υπερωρίες (σε χιλ. €)** | 20 | 19 | 19 | 21 | 22 | 22 |

**Πίνακας** **2.12**

1. Μία εταιρεία τροφίμων γνώρισε πρόσφατα δραστικές αλλαγές στις τιμές των πρώτων υλών και ο διευθυντής έχει δημιουργήσει μία ανάλυση για να επανεξετάσει τις αναλογίες των συστατικών που χρησιμοποιεί η εταιρεία στην παρασκευή αλλαντικών.

Η παρασκευή αλλαντικών περιλαμβάνει δύο βασικές απαιτήσεις για τα προϊόντα. Το ποσοστό πρωτεΐνης, κατά βάρος, πρέπει να είναι τουλάχιστον 15% και το ποσοστό του λίπους, κατά βάρος, δεν πρέπει να ξεπερνά το 30%. Η εταιρεία χρησιμοποιεί για ανάμειξη τα τέσσερα υλικά με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στον πίνακα 2.13.

Μοντελοποιήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ώστε η εταιρεία να δημιουργήσει το ιδανικό πρόγραμμα ανάμειξης, το οποίο θα ελαχιστοποιεί το κόστος ανά κιλό παραγόμενου προϊόντος. Να μην επιλύσετε το πρόβλημα.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Συστατικά** | **Πρωτεΐνη (%)** | **Λίπος (%)** | **Κόστος ανά κιλό (σε €)** |
| **A** | 50 | 10 | 2.2 |
| **B** | 30 | 15 | 0.85 |
| **C** | 15 | 35 | 0.5 |
| **D** | 5 | 45 | 0.1 |

**Πίνακας** **2.13**

1. Το Συμβούλιο Οδικής Ασφαλείας πρέπει να κατανείμει τον εθνικό προϋπολογισμό για το επόμενο οικονομικό έτος. Αμετάκλητες αποφάσεις έχουν ήδη παρθεί αναφορικά με διάφορα πεδία του προγράμματος και την ολική τους χρηματοδότηση. Για παράδειγμα, το ποσό των 180,000 € έχει κατανεμηθεί για την πρόληψη αυτοκινητιστικών ατυχημάτων και τη μείωση των υλικών ζημιών. Ωστόσο, πρέπει να παρθούν λεπτομερείς αποφάσεις για την κατανομή των κονδυλίων σε συγκεκριμένα έργα που συμβάλουν στις δράσεις του προγράμματος.

Σχετικά με τη πρόληψη αυτοκινητιστικών ατυχημάτων και τη μείωση των υλικών ζημιών δίνεται ο πίνακας 2.14, ο οποίος περιλαμβάνει τα σχέδια που προτείνουν οι αναλυτές του Συμβουλίου, μαζί με τις εκτιμήσεις για τα οφέλη ανά 1,000 € δαπάνης.

Οι υπεύθυνοι λήψης των αποφάσεων χρειάζονται τη βοήθεια σου στην κατανομή του προϋπολογισμού. Απαντώντας σε ερώτηση σχετικά με το ποιό έργο θεωρούν πιο σημαντικό, δήλωσαν: “Η ανθρώπινη ζωή είναι ιερή και δεν μπορεί να αποτιμηθεί με οποιοδήποτε ποσό χρημάτων. Από την άλλη όμως, αν υπάρχουν δύο ανταγωνιστικοί τρόποι να σώσεις μία ζωή, φυσικά θα προτιμούσαμε τον τρόπο που αποφέρει τις λιγότερες υλικές ζημιές”.

Όταν ρωτήθηκαν ειδικά για το ποιά “αναλογία” ζωών και υλικών ζημιών θα ήταν η ιδανική, απάντησαν: “Γνωρίζουμε πως μία κυβερνητική υπηρεσία έχει για σκοπούς κατανομής εσωτερικών πόρων, μία μυστική τιμή κοστολογημένη για κάθε ανθρώπινη ζωή στα 300,000 €”.

Μοντελοποιήστε το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του οποίου η λύση θα αποτελεί τη βέλτιστη κατανομή του προϋπολογισμού των 180,000 €, βάσει των παραπάνω πληροφοριών. Μην επιλύσετε το πρόβλημα.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Έργο** | **Ανώτερο όριο δαπάνης (σε €)** | **Αναμενόμενος αριθμός επιζησάντων ανά 1,000 € δαπάνης** | **Αναμενόμενη μείωση υλικών ζημιών ανά 1,000 € δαπάνης** |
| **Διαφήμιση ζώνης ασφαλείας** | 100,000 | 0.32 | 0 |
| **Έρευνα για βελτιωμένα σχέδια εθνικών οδών** | 20,000 | 0.3 | 20,000 |
| **Έρευνα για βελτιωμένα σχέδια αυτοκινήτων** | 75,000 | 0.2 | 30,000 |
| **Χρήματα για την άσκηση πίεσης στο κράτος για τα πρόστιμα οδήγησης σε κατάσταση μέθης** | 80,000 | 0.18 | 10,000 |

**Πίνακας** **2.14**

1. Μία εταιρεία είχε αναθέσει στο παρελθόν με σύμβαση την αποστολή των προϊόντων της από τα εργοστάσιά της στις αποθήκες. Ο όγκος των αποστολών μετράται σε τόνο-χιλιόμετρα (τ.χ. - οι τόνοι προϊόντος επί τα χιλιόμετρα που μεταφέρονται).Η εταιρεία μεταφέρει κάθε μήνα 400,000 τ.χ.

Αυτή τη στιγμή, η εταιρεία πληρώνει μία μεταφορική εταιρεία 1 € / τ.χ. για τη μεταφορά των προϊόντων. Η εταιρεία σκέφτεται να αγοράσει ένα στόλο φορτηγών, ώστε να αναλάβει μέρος ή το σύνολο της μεταφοράς των προϊόντων της. Τρεις τύποι φορτηγών είναι υποψήφιοι: μεγάλα φορτηγά, μεσαίου μεγέθους φορτηγά ή μικρά φορτηγά. Λεπτομέρειες για τον κάθε τύπο φορτηγού δίνονται στον πίνακα 2.15. Το κεφάλαιο για την αγορά των φορτηγών είναι σχετικά μικρό, καθώς διατίθενται μόνο 900,000 €.

Η μεταφορική εταιρεία έχει δηλώσει πως θα συνεχίσει να μεταφέρει όσα προϊόντα δεν μπορεί να μεταφέρει η ίδια η εταιρεία στην τιμή του 1 € / τ.χ. Επιπλέον, υπάρχουν και άλλοι περιορισμοί για την αγορά των φορτηγών. Ο πρώτος αφορά τον χώρο εκφόρτωσης. Λόγω του χώρου parking και του χώρου εκφόρτωσης, ο μέγιστος χώρος parking φορτηγών μπορεί να είναι 30 θέσεις. Μία θέση parking χωράει μία νταλίκα ή ένα μεσαίου μεγέθους φορτηγό ή δύο μικρά φορτηγάκια. Επίσης, λόγω του μεγέθους των παραγγελιών, τουλάχιστον τα δύο τρίτα των φορτηγών πρέπει να είναι είτε νταλίκες είτε μεσαίου μεγέθους.

Μοντελοποιήστε το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, χωρίς να το επιλύσετε.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Τύπος φορτηγού** | **Κόστος αγοράς (σε €)** | **Κόστος λειτουργίας (ανά τ.χ.)  (σε €)** | **Χωρητικότητα (τ.χ. / μήνα)** |
| **Νταλίκα** | 45,000 | 0.54 | 10,000 |
| **Μεσαίου μεγέθους** | 24,000 | 0.65 | 7,000 |
| **Μικρό φορτηγάκι** | 15,000 | 0.82 | 5,000 |

**Πίνακας** **2.15**

1. Η πόλη Gotham έχει τρία σχολεία που καλύπτουν τις ανάγκες πέντε συνοικιών. Η χωρητικότητα των σχολείων δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **Σχολεία** | **Χωρητικότητα** |
| A | 400 |
| B | 300 |
| C | 200 |
| **Σύνολο** | 900 |

**Πίνακας 2.16**

Το πλήθος των μαθητών σε κάθε συνοικία, καθώς και το ποσοστό των μειονοτήτων είναι:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Συνοικία** | **Αριθμός μαθητών** | **Ποσοστό μειονοτήτων (%)** |
| 1 | 210 | 30 |
| 2 | 240 | 60 |
| 3 | 130 | 20 |
| 4 | 80 | 10 |
| 5 | 160 | 20 |
| **Σύνολο** | 820 |  |

**Πίνακας 2.17**

Η απόσταση (σε χιλιόμετρα) από κάθε συνοικία σε κάθε σχολείο είναι:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Συνοικία** | | | | |
| **Σχολείο** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **Α** | 0.6 | 0.2 | 1.3 | 0.7 | 1.2 |
| **Β** | 0.4 | 1 | 0.25 | 0.35 | 1.5 |
| **C** | 0.65 | 1.1 | 0.8 | 1 | 0.1 |

**Πίνακας 2.18**

Ένας ομοσπονδιακός δικαστής απεφάνθη ότι τα παιδιά από μειονότητες δεν πρέπει να τυγχάνουν διακρίσεων και επομένως δεν επιτρέπεται σε κανένα σχολείο στην πόλη, ούτε πάνω από 50% ούτε κάτω από 30% των μαθητών του να προέρχονται από μειονότητες. Να σχεδιάσετε ένα πρόγραμμα για τα σχολικά λεωφορεία, το οποίο θα ελαχιστοποιήσει το συνολικό αριθμό χιλιομέτρων που θα διανύουν οι μαθητές κατά τη μεταφορά τους στο σχολείο, έχοντας υπόψη τις απαιτήσεις του δικαστή. Επίσης, κανένας μαθητής δεν μπορεί να μεταφέρεται σε απόσταση μεγαλύτερη του ενός χιλιομέτρου. Μοντελοποιήστε το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

1. Ένας κατασκευαστής παράγει ένα προϊόν σε τρία διαφορετικά εργοστάσια και το διανέμει μέσω τεσσάρων αποθηκών. Δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για τις αποθήκες και τα εργοστάσια, αντίστοιχα:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Αποθήκη** | **Τιμή πώλησης προϊόντος**  **(ανά μονάδα)** | **Ετήσια ζήτηση (σε μονάδες)** |
| **1** | 2 | 80,000 |
| **2** | 2.2 | 20,000 |
| **3** | 2 | 40,000 |
| **4** | 1.2 | 50,000 |

**Πίνακας 2.19**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Εργοστάσια** | **Κόστος κατασκευής μίας μονάδας προϊόντος (σε €)** | **Ετήσια ικανότητα παραγωγής** |
| **A** | 0.8 | 80,000 |
| **B** | 0.7 | 60,000 |
| **C** | 0.9 | 90,000 |

**Πίνακας 2.20**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Αποθήκες** | | | |
| **Εργοστάσια** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **Α** | 1.2 | 1.2 | 1.3 | 0.3 |
| **Β** | 1.2 | 1.1 | 1.35 | 0.4 |
| **C** | 1.45 | 1.3 | 1.2 | 0.2 |

**Πίνακας 2.21: Κόστη μεταφοράς σε € ανά μονάδα προϊόντος**

Ο διευθυντής marketing της εταιρείας επιθυμεί να ικανοποιήσει όλους τους περιορισμούς εξασφαλίζοντας μέγιστο κέρδος. Μοντελοποιήστε το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, χωρίς να το επιλύσετε.

1. Ο αντιπρόεδρος της εταιρείας της προηγούμενης άσκησης αποφάσισε να ικανοποιήσει μόνο όσες απαιτήσεις είναι μη-ζημιογόνες, δηλαδή, μία ζήτηση μπορεί να μείνει ανικανοποίητη, αν δεν αποφέρει κέρδη. Μοντελοποιήστε εκ νέου το πρόβλημα, χωρίς να το επιλύσετε.
2. Μία εταιρεία κατασκευάζει τρεις διαφορετικούς τύπους skateboard: κανονικό, παιδικό και αγωνιστικό. Πληροφορίες για τα κόστη και τις τιμές πώλησης δίνονται στον πίνακα 2.22.

Στην εταιρεία εργάζεται μία ομάδα πέντε ατόμων τα οποία δουλεύουν έως 40 ώρες την εβδομάδα και ο μισθός τους μαζί με τις ασφαλιστικές εισφορές είναι 420 € την εβδομάδα είτε δουλέψουν πλήρες ωράριο είτε όχι.

Η εταιρεία επιθυμεί να βρει το βέλτιστο εβδομαδιαίο πλάνο παραγωγής, το οποίο θα μεγιστοποιήσει το κέρδος και τη συνεισφορά στο πάγιο κόστος εργασίας. Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Μοντέλο** | **Κανονικό** | **Παιδικό** | **Αγωνιστικό** |
| **Τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος** | 40 € | 50 € | 90 € |
| **Κόστος πρώτων υλών ανά μονάδα προϊόντος** | 15 € | 20 € | 40 € |
| **Ώρες εργασίας που χρειάζονται για την κατασκευή μίας μονάδας προϊόντος** | 1/3 ώρες | 2/5 ώρες | 1 ώρα |
| **Ανώτατη εβδομαδιαία ζήτηση** | 400 | 150 | 80 |

**Πίνακας** **2.22**

1. Ένας κατασκευαστής έχει συνάψει σύμβαση με κάποιον πελάτη του να παράγει 2,800 μονάδες από ένα συγκεκριμένο προϊόν τους επόμενους οχτώ μήνες.

|  |  |
| --- | --- |
| **Μήνας** | **Μονάδες** |
| Ιανουάριος | 200 |
| Φεβρουάριος | 300 |
| Μάρτιος | 400 |
| Απρίλιος | 500 |
| Μάιος | 200 |
| Ιούνιος | 200 |
| Ιούλιος | 600 |
| Αύγουστος | 400 |
| **Σύνολο** | 2,800 |

**Πίνακας** **2.23**

Ο κατασκευαστής ανά μήνα παράγει όσες μονάδες προϊόντος συμφέρει οικονομικά, αλλά τις μεταφέρει και τις παραδίδει στον πελάτη του σύμφωνα με το πλάνο μεταφοράς που φαίνεται στον πίνακα 2.23.

Ο κατασκευαστής εκτιμά πως το κόστος για την αποθήκευση μίας μονάδας προϊόντος είναι 1 € το μήνα. Η χωρητικότητα της αποθήκης είναι 300 μονάδες.

Ο κατασκευαστής έχει δυνατότητα παραγωγής οποιουδήποτε αριθμού μονάδων προϊόντων σε ένα μήνα, αφού έχει τη δυνατότητα να αυξομειώνει το προσωπικό του και επομένως τη δυναμικότητα παραγωγής. Εντούτοις, υπάρχουν κόστη εκπαίδευσης προσωπικού και κόστη απόλυσης προσωπικού που έχει προσληφθεί. Ο κατασκευαστής έχει υπολογίσει ότι κοστίζει περίπου 0.7 € ανά μονάδα προϊόντος προκειμένου να αυξηθεί το επίπεδο της παραγωγής από τον ένα μήνα στον επόμενο (π.χ. Εάν η παραγωγή τον Ιανουάριο είναι 200 μονάδες και το Φεβρουάριο 300 μονάδες, το κόστος θα είναι 70 € για την εκπαίδευση του επιπλέον προσωπικού που θα χρειαστεί για την παραγωγή των επιπλέον 100 μονάδων.

Ομοίως, κοστίζει 0.50 € ανά μονάδα να μειωθεί η παραγωγή από τον ένα μήνα στον επόμενο. (Στο τέλος των οχτώ μηνών, όλοι οι υπάλληλοι θα απολυθούν με τα αναλογούντα κόστη μηδενισμού της παραγωγής). Θεωρούμε πως το επίπεδο παραγωγής πριν τον Ιανουάριο είναι μηδενικό.

Μοντελοποιήστε το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

1. Στην προηγούμενη άσκηση, θεωρήστε ότι υπάρχει ένα όριο παραγωγής στις 400 μονάδες ανά μήνα. Μοντελοποιήστε εκ νέου το πρόβλημα, με τον επιπλέον περιορισμό.
2. Ένας κατασκευαστής φορητών υπολογιστών παράγει τέσσερα μοντέλα, δύο με οθόνη τεχνολογίας LCD, τα οποία ονομάζονται  και  και δύο με οθόνη τεχνολογίας LED, τα οποία ονομάζονται  και . Η κατασκευή κάθε μοντέλου απαιτεί χρόνο συναρμολόγησης και δοκιμών, ο οποίος παρουσιάζεται στον πίνακα 2.24, μαζί με το σύνολο του χρόνου που διατίθεται ανά μήνα για συναρμολόγηση και δοκιμές.



**Πίνακας** **2.24**

Τις οθόνες τεχνολογίας LCD τις αγοράζει ο κατασκευαστής από εργοστάσιο στη Fukusima της Ιαπωνίας. Εξαιτίας καταστροφών που έχει υποστεί η περιοχή λόγω σεισμού και του Τσουνάμι που ακολούθησε, υπάρχει μείωση στην παραγωγή που οδηγεί σε ελλείψεις. Ο υπεύθυνος πωλήσεων του εργοστασίου εκτιμά πως δεν μπορούν να αποσταλούν παραπάνω από 1,000 οθόνες τον επόμενο μήνα και από αυτές το πολύ 600 μπορεί να είναι LCD.

Ο κατασκευαστής μπορεί να διαθέσει επιπλέον ώρες για δοκιμές, προσθέτοντας μία τρίτη βάρδια στις εγκαταστάσεις παραγωγής και πληρώνοντας επιπλέον για τις υπερωρίες. Έως 500 επιπλέον ώρες μπορούν να προστεθούν με αυτό τον τρόπο, αλλά το κόστος για τις υπερωρίες θα είναι 10 € την ώρα παραπάνω από το κόστος της κανονικής ώρας εργασίας.

Ο κατασκευαστής μπορεί να πουλήσει όσους φορητούς υπολογιστές μπορεί να παράγει, ανεξάρτητα από το μοντέλο.

Ο κατασκευαστής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα έσοδα από τους φορητούς υπολογιστές (μείον το κόστος υπερωριών) για τον επόμενο μήνα. Ζητείται να υπολογιστεί πόσοι φορητοί υπολογιστές από κάθε μοντέλο συμφέρει να παραχθούν. Μοντελοποιήστε το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

1. Ο διευθυντής της εξυπηρέτησης επιβατών της Alpha Airlines προσπαθεί να αποφασίσει πόσες νέες αεροσυνοδούς να προσλάβει και να εκπαιδεύσει τους επόμενους έξι μήνες. Οι απαιτήσεις στο χρόνο πτήσεων των αεροσυνοδών είναι:

|  |  |
| --- | --- |
| **Μήνας** | **Απαιτούμενες ώρες** |
| Ιανουάριος | 9,000 |
| Φεβρουάριος | 8,000 |
| Μάρτιος | 9,000 |
| Απρίλιος | 11,000 |
| Μάιος | 10,000 |
| Ιούνιος | 13,000 |

**Πίνακας 2.25**

Το πρόβλημα περιπλέκεται από δύο παράγοντες. Χρειάζεται ένας μήνας για την εκπαίδευση των νέων αεροσυνοδών, πριν μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν σε κανονικές πτήσεις. Ως εκ τούτου, οι προσλήψεις θα πρέπει να γίνουν ένα μήνα πριν προκύψει η ανάγκη.

Επίσης, η εκπαίδευση των νέων αεροσυνοδών απαιτεί χρόνο από ήδη εκπαιδευμένες αεροσυνοδούς. Χρειάζονται περίπου 100 ώρες κανονικής πτήσης από κάθε ασκούμενη στην περίοδο της εκπαίδευσης. Δηλαδή, από τον αριθμό των διαθέσιμων ωρών πτήσης κάθε κανονικής αεροσυνοδού αφαιρούνται 100 ώρες που αφιερώνονται στην επίβλεψη μίας ασκούμενης κατά το μήνα εκπαίδευσης της τελευταίας. Επειδή όμως οι ώρες της ασκούμενης λαμβάνονται υπόψη στο σύνολο των παρεχόμενων ωρών, στην πραγματικότητα δεν υπάρχει μείωση στις ώρες που παρέχονται από την εκπαιδευμένη αεροσυνοδό.

Ο διευθυντής εξυπηρέτησης επιβατών δεν ανησυχεί για τον Ιανουάριο, επειδή υπάρχουν 70 αεροσυνοδοί διαθέσιμοι. Οι κανόνες της εταιρείας απαιτούν οι αεροσυνοδοί να μην δουλεύουν πάνω από 150 ώρες το μήνα. Αυτό σημαίνει πως ο διευθυντής έχει στην διάθεση του για τον Ιανουάριο το πολύ 10,500 ώρες (1,500 ώρες περισσότερες από τις απαιτούμενες). Οι αεροσυνοδοί δεν απολύονται σε αυτή την περίπτωση, απλά δουλεύουν λιγότερες ώρες.

Τα αρχεία της εταιρείας έδειξαν πως το 10% των αεροσυνοδών παραιτείται για διάφορους λόγους στο τέλος κάθε μήνα, ενώ δε μπορούν να εκπαιδευτούν πάνω από 50 αεροσυνοδοί το μήνα.

Για την εταιρεία, το κόστος για μία εκπαιδευμένη αεροσυνοδό είναι 1,500 € το μήνα (μισθός και επιπλέον επιδόματα), ανεξάρτητα πόσες ώρες εργάστηκε (φυσικά οι ώρες δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 150). Το κόστος κάθε ασκούμενης είναι 800 € το μήνα.

Μοντελοποιήστε τα παραπάνω ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο θα σχεδιάσετε με σκοπό να βρείτε το ελάχιστο κόστος. Μην επιλύσετε το πρόβλημα.

1. Μία χώρα παράγει μόνο τρία προϊόντα: ατσάλι, μηχανήματα και αυτοκίνητα. Όλα τα υπόλοιπα αγαθά εισάγονται. Ο υπουργός Οικονομίας έχει την ευθύνη του οικονομικού σχεδιασμού και πιστεύει πως η ευμάρεια της χώρας βασίζεται στη μεγιστοποίηση της καθαρής αξίας των εξαγωγών (δηλαδή την αξία των εξαγόμενων προϊόντων μείον το κόστος των υλικών που εισάγονται για να παραχθούν αυτά τα προϊόντα). Η χώρα μπορεί να πουλήσει όλο το παραγόμενο ατσάλι, τα μηχανήματα και τα αυτοκίνητα στην παγκόσμια αγορά με καθαρή εισροή 600 € ανά τόνο το ατσάλι, 3,000 € ανά μηχάνημα και 1800 € ανά αυτοκίνητο.

Για να παραχθεί ένας τόνος ατσάλι, απαιτούνται 0.05 μονάδες μηχανήματος, 0.01 μονάδες αυτοκινήτου, 2 τόνοι κάρβουνο που στην παγκόσμια αγορά πουλιέται 100 € ο τόνος και άλλα εισαγόμενα αγαθά τα οποία κοστίζουν 50 €. Επίσης, χρειάζεται 1.5 εργάτη ανά έτος για να παραχθεί κάθε τόνος ατσάλι. Η δυνατότητα παραγωγής ατσαλιού στη χώρα είναι 100,000 τόνοι το χρόνο.

Για να παραχθεί ένα αυτοκίνητο χρειάζεται 1 τόνος ατσαλιού, 0.1 μονάδες μηχανήματος και 1 εργάτη ανά έτος. Επιπλέον, χρειάζονται υλικά εισαγωγής 300 €. Η δυνατότητα παραγωγής είναι 700,000 μονάδες το χρόνο.

Για να παραχθεί ένα μηχάνημα, χρειάζεται 0.01 μονάδες αυτοκινήτου, 0.5 τόνοι ατσαλιού, 2 εργάτες ανά έτος και υλικά εισαγωγής αξίας 100 €. Η δυνατότητα παραγωγής είναι 50,000 μονάδες το χρόνο.

Το συνολικό διαθέσιμο ειδικευμένο προσωπικό για εργασία στη χώρα είναι 800,000 εργάτες.

α) Θεωρώντας πως δεν επιτρέπεται να εισαχθούν καθόλου ατσάλι, αυτοκίνητα ή μηχανήματα, να μοντελοποιηθεί το παραπάνω ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ώστε να αποφασιστεί ο συνδυασμός της παραγωγής που θα μεγιστοποιήσει την καθαρή αξία των εξαγωγών (σε €).

β)Πως θα μοντελοποιούσατε το παραπάνω πρόβλημα αν δεν υπήρχαν περιορισμοί στην εισαγωγή ατσαλιού, μηχανημάτων ή αυτοκινήτων στις δοσμένες τιμές; Μπορείτε να βρείτε μία προφανή λύση για αυτό το πρόβλημα;