**Κεφάλαιο 14 - Θεωρία Παιγνίων**

### Άλυτες ασκήσεις

1. Στο γνωστό παιχνίδι Πέτρα (Π) – Μολύβι (Μ) – Ψαλίδι (Ψ) – Χαρτί (Χ), ισχύουν οι εξής κανόνες:
* Η πέτρα κερδίζει το ψαλίδι και το μολύβι.
* Το μολύβι κερδίζει το χαρτί.
* Το ψαλίδι κερδίζει το μολύβι και το χαρτί.
* Το χαρτί κερδίζει την πέτρα.

Στην περίπτωση ταυτόσημης επιλογής έχουμε ισοπαλία με τιμή πληρωμής μηδέν (0), στην περίπτωση που κερδίζει ο παίκτης 1 η τιμή πληρωμής είναι 1, ενώ όταν χάνει, -1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας πληρωμών από τη σκοπιά του παίκτη 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
| Π | Μ | Ψ | Χ |
| **Παίκτης 1** |  Π |  |  |  | -1 |
| Μ |  |  |  |  |
| Ψ |  |  | 0 |  |
| Χ | 1 |  |  |  |

Πίνακας 14.18

Να εξεταστεί με το maximin-minimax κριτήριο εάν το παραπάνω παίγνιο έχει σημείο ισορροπίας και αν είναι σταθερό.

1. Να βρεθεί με τη μέθοδο του maximin-minimax κριτηρίου το σημείο ισορροπίας και η βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη του παίγνιου μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 6 | -2 | 5 |
|  | -5 | 2 | 12 |
|  | 11 | 6 | 9 |

Πίνακας 14.19

1. Έστω ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 6 | -2 | 5 |
|  | -5 | 2 | 12 |
|  | 11 | 1 | 9 |

Πίνακας 14.20

α) Χρησιμοποιείστε το maximin-minimax κριτήριο για να βρείτε τη βέλτιστη στρατηγική κάθε παίκτη.

β) Έχει αυτό το παίγνιο σημείο ισορροπίας;

γ) Είναι το παίγνιο σταθερό;

1. Να λυθεί το παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος με πίνακα πληρωμών τον πίνακα 14.19 με τη μέθοδο της κυρίαρχης ή επικρατέστερης στρατηγικής (δηλαδή να απαλείφονται από τους παίκτες οι υποδεέστερες στρατηγικές όταν αυτές υπάρχουν).
2. Δύο εταιρίες μοιράζονται την αγορά για ένα συγκεκριμένο είδος προϊόντος. Ετοιμάζουν και οι δύο τη στρατηγική τους για το επόμενο έτος, κατά τη διάρκεια του οποίου επιθυμούν να κατακτήσουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μερίδιο αγοράς από τις αναμενόμενες πωλήσεις 10 χιλ. νέων μονάδων του συγκεκριμένου προϊόντος. Οι δύο εταιρίες μπορούν να ακολουθήσουν τρεις διαφορετικές στρατηγικές, προκειμένου να αυξήσουν τις πωλήσεις τους:
* Προσφορές (**O**ffers)
* Διαφημίσεις (**A**dvertising)
* Μείωση τιμών (**P**ricing)

Στον παρακάτω πίνακα πληρωμών σταθερού αθροίσματος παρουσιάζονται οι πωλήσεις του προϊόντος από τη σκοπιά της εταιρείας Α.

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Εταιρεία 2** |
| **o** | **a** | **p** |
| **Εταιρεία 1** | **Ο**  | 7 | 8 | 6 |
| **Α** | 6 | 9 | 5 |
| **P** | 8 | 3 | 4 |

Πίνακας 14.21: Πίνακας πληρωμών σε χιλιάδες μονάδες

α) Χωρίς την απαλοιφή των υποδεέστερων στρατηγικών να χρησιμοποιηθεί το maximin-minimax κριτήριο για να οριστεί η βέλτιστη στρατηγική για κάθε εταιρεία και να υπολογιστεί η τιμή του παίγνιου.

β) Να εντοπιστούν και να απαλειφτούν όσο το δυνατόν περισσότερες υποδεέστερες στρατηγικές. Να γίνει κατάλογος των υποδεέστερων στρατηγικών όπου να φαίνεται η σειρά διαγραφής τους. Να σχεδιαστεί ο μειωμένος πίνακας πληρωμών, όπου να μην απομένει καμία υποδεέστερη στρατηγική.

1. Να εφαρμοστεί η μέθοδος της κυρίαρχης ή επικρατέστερης στρατηγικής στο παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος με πίνακα πληρωμών τον πίνακα 14.20. Αν δε βρεθεί αμιγής βέλτιστη στρατηγική, να εφαρμοστεί στη συνέχεια κατάλληλη μέθοδος ώστε να βρεθεί βέλτιστη μεικτή στρατηγική.
2. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 1 | -5 | 4 |
|  | 4 | 1 | 1 |
|  | 0 | 1 | -4 |

Πίνακας 14.22

Να οριστεί η βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη απαλείφοντας διαδοχικά τις υποδεέστερες στρατηγικές και να δοθεί η σειρά απαλοιφής.

1. Η διοίκηση ενός εργοστασίου και το σωματείο των εργαζομένων διαπραγματεύονται για μια νέα σύμβαση εργασίας. Οι διαπραγματεύσεις όμως έχουν φτάσει σε αδιέξοδο, όπου η τελική πρόταση της εργοδοσίας είναι να δώσει αύξηση 50€ στο μηνιαίο μισθό, ενώ η τελική απαίτηση του σωματείου είναι 100€ αύξηση στο μηνιαίο μισθό. Οι δύο πλευρές συμφωνούν να αναθέσουν σε έναν ανεξάρτητο διαπραγματευτή να καθορίσει την αύξηση του μηνιαίου μισθού.

Ο διαπραγματευτής ζητάει από τα δύο μέρη να υποβάλουν εμπιστευτικές προτάσεις για ένα δίκαιο διακανονισμό όπου η προτεινόμενη αύξηση να είναι στρογγυλοποιημένη σε δεκάδες ευρώ. Δηλαδή, το σωματείο (παίκτης 1) πρέπει να αποφασίσει κατά πόσες δεκάδες € θα μειώσει τις απαιτήσεις του από τα 100€, ενώ η εργοδοσία (παίκτης 2) θα πρέπει να αποφασίσει πόσο θα αυξήσει την προσφορά του πάνω από τα 50€.

Από παλαιότερη εμπειρία και οι δύο πλευρές γνωρίζουν ότι αν παραμείνουν σταθερές στις απόψεις τους ή αν και οι δύο υποχωρήσουν κατά το ίδιο ποσό, ο διαπραγματευτής συμβιβάζει τις δύο προτάσεις στο μέσο της απόστασής τους, που στην συγκεκριμένη περίπτωση αντιστοιχεί με αύξηση 75€. Σε κάθε άλλη περίπτωση ο διαπραγματευτής υιοθετεί την άποψη της πλευράς που υποχώρησε περισσότερο. Κάθε πλευρά καλείται να προτείνει την αύξηση του μισθού σε τέτοιο ύψος, που να εξυπηρετεί καλύτερα τα συμφέροντά της.

α) Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα ως ένα παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Να συμπληρωθούν τα υπόλοιπα στοιχεία του παρακάτω πίνακα πληρωμών με την τελική αύξηση που θα λάβουν οι εργαζόμενοι μετά την επέμβαση του διαπραγματευτή.

β) Να βρεθεί χρησιμοποιώντας το maximin-minimax κριτήριο η πρόταση που συμφέρει την εργοδοσία και η πρόταση που συμφέρει το σωματείο.

γ) Θεωρώντας ότι και οι δύο πλευρές ενεργούν σύμφωνα με το συμφέρον τους, ποια είναι η τελική αύξηση που θα αποφασίσει ο ανεξάρτητος διαπραγματευτής;

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Αύξηση που δίνει η εργοδοσία πάνω από την αρχική πρόταση των 50 €** |
| **0** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** |
| **Μείωση των απαιτήσεων του σωματείου κάτω από την αρχική των 100 €** | **0** | 75 |  |  |  |  |  |
| **10** |  |  |  |  |  |  |
| **20** | 80 | 80 | 75 | 80 | 90 | 100 |
| **30** |  |  |  |  |  |  |
| **40** |  | 60 |  |  |  |  |
| **50** | 50 |  |  |  |  |  |

Πίνακας 14.23: Αύξηση που αποφασίζει ο διαπραγματευτής

1. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | -3 | 6 | -3 | 8 |
|  | -3 | 2 | -6 | 5 |
|  | 6 | -7 | -3 | 2 |

Πίνακας 14.24

Να λυθεί το παίγνιο με δύο τρόπους: α) χρησιμοποιώντας το maximin-minimax κριτήριο και β) απαλείφοντας διαδοχικά τις υποδεέστερες στρατηγικές και δηλώνοντας τη σειρά των απαλοιφών, για να βρείτε τη βέλτιστη στρατηγική κάθε παίκτη.

1. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 1 | -3 | 3 |
|  | 6 | 5 | -4 |
|  | 0 | -4 | 2 |

Πίνακας 14.25

α) Να απαλειφτούν οι υποδεέστερες στρατηγικές αν υπάρχουν δηλώνοντας παράλληλα τη σειρά των απαλοιφών.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχει στο παίγνιο σημείο ισορροπίας, χρησιμοποιώντας το maximin-minimax κριτήριο στον πίνακα πληρωμών που προέκυψε από το α) ερώτημα.

γ) Αν υπάρχει σημείο ισορροπίας να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική και η βέλτιστη τιμή του παίγνιου. Σε αντίθετη περίπτωση, να βρεθεί η βέλτιστη μεικτή στρατηγική υπολογίζοντας τις αντίστοιχες πιθανότητες για τις στρατηγικές κάθε παίκτη, καθώς και η αναμενόμενη τιμή του παίγνιου.

1. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 1 | -3 | 3 |
|  | 3 | 5 | -4 |
|  | 0 | -4 | 2 |

Πίνακας 14.26

α) Να μετατραπεί σε ισοδύναμο παίγνιο της μορφής  ή , απαλείφοντας τυχόν υποδεέστερες στρατηγικές.

β) Να βρεθεί η βέλτιστη μεικτή στρατηγική του ισοδύναμου παίγνιου του α) ερωτήματος με τη γραφική μέθοδο.

γ) Nα μοντελοποιηθεί το παίγνιο πριν την απαλοιφή των υποδεέστερων στρατηγικών ως ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού και να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.  

1. Έστω το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 1 | 6 | 4 | 1 |
|  | 8 | -1 | 4 | 0 |
|  | 4 | 1 | -1 | 6 |

Πίνακας 14.27

α) Να εφαρμοστεί η μέθοδος της Παραγράφου 14.9 , για να μοντελοποιηθεί η εύρεση της βέλτιστης μεικτής στρατηγικής σύμφωνα με το maximin-minimax κριτήριο ως ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

β) Να βρεθεί η βέλτιστη μεικτή στρατηγική του παίγνιου με τη μέθοδο Simplex.

1. Να εφαρμοστούν τα ερωτήματα της προηγούμενης άσκησης για το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

|  |  |
| --- | --- |
| **Στρατηγικές** | **Παίκτης 2** |
|  |  |  |  |  |
| **Παίκτης 1** |  | 3 | 0 | 1 | -1 | -5 |
|  | -2 | 3 | 6 | 0 | 1 |
|  | 4 | -1 | 4 | 1 | 3 |
|  | -1 | 2 | -2 | 3 | 2 |

Πίνακας 14.28