**Κεφάλαιο 12:** **Θεωρία ουρών αναμονής**

### Άλυτες ασκήσεις

1. Στο τηλεφωνικό κέντρο της χρηματιστηριακής εταιρείας TOTALOSS, καταφθάνουν καθ’ όλο το οκτάωρο λειτουργίας της 240 εντολές αγοράς ή πώλησης μετοχών με βάση τη κατανομή Poisson. Στο τηλεφωνικό κέντρο είναι εγκατεστημένα δύο υποσυστήματα απόκρισης, στα οποία οι εντολές κατανέμονται ισοπίθανα. Δηλαδή, όταν φτάνει μία κλήση, τότε με πιθανότητα 50% προωθείται στο 1ο υποσύστημα για διεκπεραίωση, ή με πιθανότητα 50% επίσης, προωθείται στο 2ο υποσύστημα. Κάθε υποσύστημα έχει τη δική του ξεχωριστή ουρά αναμονής και ακολουθεί πειθαρχία FIFO. Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε υποσύστημα για να διεκπεραιώσει μία κλήση είναι κατά μέσο όρο 1.5 λεπτό (εκθετική κατανομή). Το κόστος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα εκτιμάται στα 3 € ανά ώρα και το κόστος που χρεώνει ο ΟΤΕ την TOTALOSS για κάθε ώρα χρήσης των γραμμών της (είτε σε αναμονή είτε σε συνομιλία) ανέρχεται στα 0.5 €.

α) Ποιο είναι το μέσο πλήθος κλήσεων που περιμένουν σε κάθε ουρά αναμονής και πόσος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μίας κλήσης;

β) Πόσο είναι το συνολικό λειτουργικό κόστος ανά ώρα με βάση το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα (δύο ουρές μαζί);

Στους υπολογισμούς σας, να διατηρήσετε είτε κλασματικούς αριθμούς, είτε να στρογγυλοποιείτε σε τουλάχιστον τέσσερα (4) δεκαδικά ψηφία. Κάθε τύπο που χρησιμοποιείτε να τον παραθέσετε με σαφήνεια και στη συνέχεια να αντικαταστήσετε τις αριθμητικές τιμές και να κάνετε τις πράξεις. 

(Δ.Π.Μ.Σ. “Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες”, Ε.Μ.Π., Ιούνιος 2010)

1. Να λυθεί εκ νέου η προηγούμενη άσκηση για την περίπτωση που τα 2 υποσυστήματα συνδεθούν σε ένα κοινό σύστημα. 
2. Στη γραμματεία μίας υπηρεσίας, τα ηλεκτρονικά μηνύματα (e-mails) καταφθάνουν με μέσο ρυθμό 120 μηνύματα ανά ημέρα 8ωρης εργασίας, με βάση τη κατανομή Poisson. Στη γραμματεία εργάζονται 5 άτομα, στα οποία τα ηλεκτρονικά μηνύματα κατανέμονται ισοπίθανα. Δηλαδή, όταν φτάνει ένα μήνυμα ακολουθείται πειθαρχία FIFO και με πιθανότητα 0.2 προωθείται σε κάποιο από τα άτομα της γραμματείας. Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε εργαζόμενος για να διεκπεραιώσει (επεξεργασία και απάντηση) ένα μήνυμα είναι κατά μέσο όρο 16 λεπτά με τυπική απόκλιση 10 λεπτά. Το κόστος εργασίας ανέρχεται στα 10€ ανά ώρα.

α) Ποιό μοντέλο ακολουθείται;

β) Πόσος είναι κατά μέσο όρο ο χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών αφίξεων;

γ) Ποια είναι η τυπική απόκλιση του χρόνου μεταξύ 2 αφίξεων (δικαιολογήστε);

δ) Πόσο είναι το μέσο πλήθος μηνυμάτων που περιμένουν στην ουρά αναμονής;

ε) Πόσος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής ενός μηνύματος πριν διαβαστεί;

στ) Πόσος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός μηνύματος στο σύστημα;

ζ) Πόσο είναι το συνολικό λειτουργικό κόστος ανά μήνυμα με βάση το χρόνο που αυτό απασχολεί το σύστημα;

Στους υπολογισμούς σας, να διατηρήσετε είτε κλασματικούς αριθμούς, είτε να στρογγυλοποιείτε σε τέσσερα (4) σημαντικά ψηφία. Κάθε τύπο που χρησιμοποιείτε να τον παραθέσετε με σαφήνεια και στη συνέχεια να αντικαταστήσετε τις αριθμητικές τιμές και να κάνετε τις πράξεις.

(Δίνεται ότι ο πολλαπλασιαστής του χρόνου αναμονής στην περίπτωση 5 εξυπηρετητών για το μοντέλο Μ/Μ/5 και ανάλογα με τον συντελεστή επιβάρυνσης του συστήματος είναι:

, , ).

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π., Κανονική εξέταση, 2011)

1. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων των πελατών μιας εταιρείας ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή  λεπτά. Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι επίσης εκθετικός με μέση τιμή  λεπτά.

α) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός πελατών που περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν (εξυπηρετείται ένας πελάτης κάθε φορά);

β) Ποιος είναι ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη πριν αυτός αρχίσει να εξυπηρετείται;

γ) Ποιος είναι ο **μέσος συνολικός** χρόνος αναμονής και εξυπηρέτησης που θα ξοδέψει κάθε πελάτης στο σύστημα;

1. Στην προηγούμενη άσκηση, με ένα επιπλέον κόστος 30 € την ώρα ο χρόνος εξυπηρέτησης μειώνεται και αποκτά μέση τιμή 12 λεπτά και τυπική απόκλιση 6 λεπτά.

α) Ποιος θα είναι ο νέος μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη;

β) Ποιος θα είναι συνολικός χρόνος που θα ξοδεύει τώρα ο κάθε πελάτης για την εξυπηρέτησή του;

γ) Ποιος θα είναι ο μέσος αριθμός πελατών σε αναμονή;

δ) Είναι προς το συμφέρον της εταιρείας η βελτίωση αν το ωριαίο κόστος καθυστέρησης ενός πελάτη υπολογίζεται ότι είναι 40 €;

1. Λόγω μεταβλητότητας των καιρικών συνθηκών και εξ αιτίας και άλλων παραγόντων παρουσιάζονται καθυστερήσεις στην εκφόρτωση των φορτηγών πλοίων σε συγκεκριμένη προβλήτα του λιμένος Πειραιώς. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων πλοίων στην προβλήτα εκφόρτωσης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή  ημέρες. Ο χρόνος εκφόρτωσης είναι επίσης εκθετικός με μέση τιμή ημέρες.

α) Ποιος είναι ο χρόνος αναμονής κάθε πλοίου πριν αυτό αρχίσει να παραδίδει το φορτίο του;

β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός φορτηγών πλοίων που περιμένουν αρόδου μέχρι να ελευθερωθεί η προβλήτα εκφόρτωσης (εξυπηρετείται ένα σκάφος κάθε φορά);

γ) Ποιος είναι ο μέσος συνολικός χρόνος αναμονής και εξυπηρέτησης που θα ξοδέψει κάθε πλοίο;

1. Ένας τρόπος για να βελτιωθούν οι εγκαταστάσεις εκφόρτωσης της προηγούμενης άσκησης είναι να ενοικιαστεί έναντι 2,250 € ημερησίως μια γερανογέφυρα ταχείας εκφόρτωσης. Με τη νέα διάταξη ο χρόνος εξυπηρέτησης έχει μέση τιμή 0.2 ημέρες και τυπική απόκλιση 0.1 ημέρες.

α) Εάν νοικιαστεί τελικά η νέα διάταξη, ποιος θα είναι ο νέος μέσος χρόνος αναμονής ενός πλοίου;

β) Ποιος θα είναι συνολικός χρόνος που θα ξοδεύει ένα πλοίο για την εξυπηρέτησή του;

γ) Ποιος θα είναι ο μέσος αριθμός πλοίων σε αναμονή;

δ) Είναι προς το συμφέρον της εταιρείας η ενοικίαση της διάταξης ταχείας εκφόρτωσης αν το κόστος καθυστέρησης ενός πλοίου υπολογίζεται ότι είναι 4,000 € ημερησίως;

1. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να βελτιωθεί η εξυπηρέτηση των φορτηγών πλοίων της άσκησης 6 είναι ο οργανισμός διαχείρισης του λιμένος να νοικιάσει με ένα ημερήσιο κόστος 3,000 € μια δεύτερη προβλήτα εκφόρτωσης της ίδιας δυναμικότητας με την υπάρχουσα (μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίδια με αυτά της άσκησης 5). Εάν η δεύτερη προβλήτα εκφόρτωσης τελικά ενοικιαστεί:

α) Ποιος θα είναι ο νέος μέσος χρόνος αναμονής ενός πλοίου;

β) Ποιος θα είναι ο μέσος αριθμός πλοίων σε αναμονή;

γ) Είναι προς το συμφέρον της εταιρείας η ενοικίαση της δεύτερης προβλήτας αν το κόστος καθυστέρησης ενός πλοίου υπολογίζεται ότι είναι 4,000 € ημερησίως;

1. Σε συνέχεια των προβλημάτων 6 και 7 ένας αναλυτής, αφού μελέτησε τα κόστη και τα οφέλη από τις δύο προτεινόμενες βελτιώσεις, συνέστησε να προχωρήσει ο οργανισμός διαχείρισης του λιμένος και στις δύο βελτιώσεις συγχρόνως. Δηλαδή, για τη μεν υπάρχουσα προβλήτα να ενοικιαστεί η γερανογέφυρα ταχείας εκφόρτωσης, συγχρόνως δε να προστεθεί και η δεύτερη προβλήτα με τη δυναμικότητα που αυτή έχει. Δυστυχώς, δεν υπάρχουν στο κεφάλαιο έτοιμοι τύποι για την περίπτωση μίας ουράς με δύο κανάλια με διαφορετικούς μέσους χρόνους εξυπηρέτησης. Να βρεθεί ένας τρόπος για τον υπολογισμό ενός ανώτατου ορίου του δυνατού οφέλους από αυτή τη νέα λύση. Χρησιμοποιείστε αυτό το αποτέλεσμα για να σχολιάσετε την πρόταση του αναλυτή.
2. Στο τηλεφωνικό κέντρο μιας εταιρείας, οι κλήσεις καταφθάνουν με μέσο ρυθμό 40 κλήσεις ανά ώρα με βάση τη κατανομή Poisson. Στο τηλεφωνικό κέντρο είναι εγκατεστημένα δύο αυτόματα υποσυστήματα απόκρισης, στα οποία οι εισερχόμενες κλήσεις κατανέμονται ισοπίθανα. Δηλαδή, όταν φτάνει μία κλήση, τότε με πιθανότητα 0.5 προωθείται στο 1ο υποσύστημα για διεκπεραίωση, ή με πιθανότητα 0.5 επίσης, προωθείται στο 2ο υποσύστημα. Κάθε υποσύστημα έχει τη δική του ξεχωριστή ουρά αναμονής και ακολουθεί πειθαρχία FIFO. Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε υποσύστημα για να διεκπεραιώσει μία κλήση είναι κατά μέσο όρο 2.5 λεπτά (εκθετική κατανομή). Το κόστος λειτουργίας καθενός αυτόματου υποσυστήματος απόκρισης ανέρχεται στα 3 € ανά ώρα και το κόστος που χρεώνεται η εταιρεία για κάθε ώρα χρήσης των γραμμών του τηλεφωνικού κέντρου (είτε σε αναμονή είτε σε συνομιλία) ανέρχεται στα 0.5 €.

α) Πόσο το μέσο πλήθος κλήσεων που περιμένουν σε κάθε ουρά αναμονής και πόσος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μίας κλήσης;

β) Πόσο είναι το συνολικό λειτουργικό κόστος ανά ώρα με βάση το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα (δύο ουρές μαζί); Στους υπολογισμούς σας, να διατηρήσετε είτε κλασματικούς αριθμούς, είτε να στρογγυλοποιείτε σε τουλάχιστον τέσσερα (4) δεκαδικά ψηφία. Κάθε τύπο που χρησιμοποιείτε να τον παραθέσετε με σαφήνεια και στη συνέχεια να αντικαταστήσετε τις αριθμητικές τιμές και να κάνετε τις πράξεις.

1. Πολλές τράπεζες και ταχυδρομεία έχουν αλλάξει το σύστημα αναμονής από μία σειρά για κάθε υπάλληλο σε μία μονάχα ουρά, όπου χρησιμοποιείται σύστημα FIFO που διασφαλίζεται από χαρτάκια προτεραιότητας που λαμβάνουν οι πελάτες. Εξετάστε αυτή την περίπτωση ανάλογα με την καθεμία από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1:** Οι πελάτες φτάνουν στην τράπεζα κατά μέσο όρο 100 την ώρα (ο μέσος χρόνος άφιξης είναι 0.6 λεπτά) και δημιουργούν μία σειρά. Υπάρχουν τέσσερις ταμίες, και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 3 λεπτά για κάθε ταμία. Θεωρήστε πως ο χρόνος αναμονής και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή. Ποιός είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά και ποιο το μέσο μήκος της ουράς;

**Περίπτωση 2:** Οι πελάτες φτάνουν στη θυρίδα κάθε ταμία με ρυθμό 25 πελάτες την ώρα (ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι 2.4 λεπτά). Υπάρχουν τέσσερις ταμίες, οπότε ο συνολικός ρυθμός των αφίξεων είναι 100 την ώρα. Υπάρχει χωριστή ουρά για κάθε ταμία (οι πελάτες **δεν** έχουν το δικαίωμα να αλλάξουν ουρά). Χρησιμοποιείται ουρά προτεραιότητας FIFO και όπως και στην περίπτωση 1 ο χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε ταμία είναι 3 λεπτά. Ποιός είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά και ποιο το μέσο μήκος της ουράς;

Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα των περιπτώσεων 1 και 2 και να αναφερθούν ποιοί πρόσθετοι παράγοντες μπορεί να επηρεάσουν τους χρόνους αναμονής σε μια ρεαλιστική κατάσταση μέσα σε μία τράπεζα.