**Κεφάλαιο 10:** **Έλεγχος αποφάσεων υπό αβεβαιότητα - Δένδρα αποφάσεων**

### Άλυτες ασκήσεις

1. Μία εταιρεία έχει τα δικαιώματα εξόρυξης πετρελαίου από συγκεκριμένη περιοχή. Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να πουλήσει τα δικαιώματά της για 400,000 €, ή μπορεί να προχωρήσει σε γεώτρηση. Τα τέσσερα δυνατά αποτελέσματα της γεώτρησης μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητες φαίνονται στον αντίστοιχο πίνακα:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Αποτελέσματα της γεώτρησης** | **Πιθανότητες** | **Κέρδος / Ζημιά (σε €)** |
| **Ξερό πηγάδι** | 0.15 | -1,000,000 |
| **Μόνο φυσικό αέριο** | 0.40 | 500,000 |
| **Συνδυασμός φυσικό αέριο με πετρέλαιο** | 0.25 | 1,000,000 |
| **Μόνο πετρέλαιο** | 0.20 | 2,000,000 |

Πίνακας 10.24

Με χρήση δένδρου απόφασης να απαντηθούν τα παρακάτω:

α) Πρέπει η εταιρεία να προχωρήσει στην εξόρυξη; (Προφανώς αν η εταιρεία κάνει την εξόρυξη και το πηγάδι αποδειχθεί ξερό δεν θα μπορεί πλέον να πωλήσει τα δικαιώματα στην τιμή των 400,000 €).

β) Υποθέστε ότι πριν αρχίσει η εξόρυξη μία ανταγωνίστρια εταιρεία προσφέρεται να αγοράσει τα δικαιώματα. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που πρέπει να δεχτούμε;

γ) Υποθέστε ότι πριν αρχίσει η γεώτρηση ένα σύνολο επενδυτών έκανε τη πρόταση να πληρώσει στην εταιρεία 350,000 € για το 50% των δικαιωμάτων (δηλαδή να δώσει 350,000 € και να αναλάβει το 50% της πιθανής ζημιάς ή το 50% του πιθανού κέρδους). Πρέπει η εταιρεία να δεχθεί την πρόταση των επενδυτών; 

(Δ.Π.Μ.Σ “Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες”, Ιούνιος 2010)

1. Η πετρελαϊκή εταιρεία της προηγούμενης άσκησης έχει τη δυνατότητα να προχωρήσει σε μια δοκιμαστική γεώτρηση με κόστος μόλις 200,000 €, ώστε να γνωρίζει με βεβαιότητα την ποιότητα του κοιτάσματος. Είναι προς το συμφέρον της μία τέτοια δαπάνη;  
2. Η εταιρεία TRISTAR σχεδιάζει να κατασκευάσει ένα νέο εμπορικό κέντρο στα Χανιά της Κρήτης. Η εταιρεία έχει την δυνατότητα να κατασκευάσει ένα πλήρες μεγάλου μεγέθους εμπορικό κέντρο ή εναλλακτικά ένα μικρού μεγέθους εμπορικό κέντρο, το οποίο όμως θα μπορεί να επεκταθεί σε μεγάλου μεγέθους 2 χρόνια αργότερα, εάν προκύψει εν τω μεταξύ αυξημένη ζήτηση σε ένα ευνοϊκότερο οικονομικό περιβάλλον. Ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσης είναι μια δεκαετία. Η TRISTAR εκτιμά ότι η πιθανότητα για έξοδο από την κρίση και διαμόρφωση αυξημένης ζήτησης είναι 75%. Το κόστος της άμεσης κατασκευής ενός εμπορικού κέντρου μεγάλου μεγέθους είναι 5 εκατ. €, ενώ ενός μικρού 2 εκατ. €. Επέκταση ενός μικρού μεγέθους εμπορικού κέντρου σε μεγάλου μεγέθους μετά από δύο χρόνια κοστίζει 4 εκατ. €. Τα έσοδα απ’ τη λειτουργία ενός εμπορικού κέντρου για την επόμενη δεκαετία δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

|  |
| --- |
| **Εκτιμώμενο ετήσιο έσοδο (σε χιλ. €)** |
| **Περιπτώσεις** | **Υψηλή ζήτηση** | **Χαμηλή** **ζήτηση** |
| **Μεγάλο μέγεθος τώρα** | 1,000 | 300 |
| **Μικρό μέγεθος τώρα** | 250 | 200 |
| **Επέκταση μετά από 2 χρόνια** | 900 | 200 |

**Πίνακας 10.25**

α) Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο δένδρο απόφασης, λαμβάνοντας υπόψη ότι σε δύο χρόνια η TRISTAR έχει την επιλογή να επεκτείνει ή όχι το μικρό εμπορικό κέντρο.

β) Να δοθεί επίσης μία στρατηγική ενεργειών για την TRISTAR για την επόμενη δεκαετία. (για απλοποίηση να αγνοηθεί η επίδραση του χρόνου στην χρηματική αξία των εσόδων).

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π., Σεπτέμβριος 2009)

1. Μία βιομηχανία κατασκευής επίπλων, επιθυμεί να επεκτείνει την δυναμικότητα παραγωγής της. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους: απασχολώντας υπερωριακά το προσωπικό της στις υπάρχουσες εγκαταστάσεις ή αποκτώντας επιπλέον πρόσβαση (νοικιάζοντας) σε νέες εγκαταστάσεις. Η παραγωγή με υπερωριακή απασχόληση του εργατικού δυναμικού επιβαρύνει κάθε μονάδα παραγόμενου προϊόντος με 4 € σε σχέση με το αντίστοιχο προϊόν που παράγεται κανονικά, το δε σύνολο των παραγόμενων με αυτόν τον τρόπο προϊόντων δεν μπορεί να υπερβαίνει τις 20,000 μονάδες το χρόνο. Ενοικιάζοντας τις νέες εγκαταστάσεις η βιομηχανία θα επωμισθεί ένα επιπλέον ετήσιο κόστος ενοικίου 60,000 €. Οι εργάτες που θα απασχοληθούν στο νέο εργοστάσιο θα αμειφθούν με το αντίτιμο της κανονικής και όχι της υπερωριακής εργασίας. Ετησίως στο νέο εργοστάσιο μπορούν να παραχθούν έως 25,000 μονάδες. Η επιχείρηση διαθέτει τμήμα προγραμματισμού και στατιστικής ανάλυσης, που μετά από σχετική έρευνα εκτίμησε ότι η αύξηση της ζήτησης για τα προϊόντα της, πέραν των μονάδων που παράγει στο υπάρχον εργοστάσιο και στο κανονικό ωράριο παρουσιάζει την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας:

|  |  |
| --- | --- |
| **Επιπρόσθετη** **(ετήσια) ζήτηση** | **Πιθανότητα** |
| 10,000 | 0.25 |
| 15,000 | 0.45 |
| 20,000 | 0.30 |

**Πίνακας 10.26**

α) Να σχεδιάσετε κατάλληλο δένδρο απόφασης για το πρόβλημα και να βρείτε τη βέλτιστη απόφαση που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος.

β) Υποθέστε ότι μια εταιρεία στατιστικών ερευνών προσφέρεται να διενεργήσει μια έρευνα προκειμένου να προσδιορίσει με ακρίβεια την ζήτηση για την αυξημένη ποσότητα που πρόκειται να παρουσιαστεί στο μέλλον, με χρέωση 1,000 €. Θα συμβουλεύατε τη βιομηχανία επίπλων να παραγγείλει την έρευνα; Δικαιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο κόστος ευκαιρίας (EOL) της βέλτιστης απόφασης του ερωτήματος (α);

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π., Φεβρουάριος 2012)

1. Εταιρεία κατασκευής φωτογραφικών μηχανών παράγει 2 μοντέλα (το βασικό και το ψηφιακό). Η προετοιμασία για την υψηλής ζήτησης περίοδο των Χριστουγέννων απαιτεί να εκτιμηθεί ο όγκος των πωλήσεων. Το κόστος για το βασικό μοντέλο είναι 100 € και η τιμή πώλησής του 200 €. Το κόστος για το ψηφιακό μοντέλο είναι 200 € και η τιμή πώλησης του 350 €. Ακολουθεί εκτίμηση της ζήτησης:

|  |  |
| --- | --- |
| **Βασικό μοντέλο** | **Ψηφιακό μοντέλο** |
| **Ζήτηση** | **Πιθανότητα** | **Ζήτηση** | **Πιθανότητα** |
| 5,000 | 0.20 | 3,000 | 0.35 |
| 10,000 | 0.80 | 6,000 | 0.65 |

**Πίνακας 10.27**

 Όσες φωτογραφικές μηχανές δεν πουληθούν την περίοδο των Χριστουγέννων εκποιούνται στη συμβολική τιμή των 50 € για το βασικό μοντέλο και των 100 € για το ψηφιακό. Η εταιρεία πιστεύει ότι τα δύο μοντέλα της, απευθύνονται σε διαφορετικό αγοραστικό κοινό και ως εκ τούτου θεωρούμε τη ζήτησή τους ανεξάρτητη.

Υποθέστε ότι η εταιρεία διαθέτει απεριόριστες κατασκευαστικές δυνατότητες και ότι οι δύο αποφάσεις μπορούν να παρθούν ανεξάρτητα. Ποιές είναι οι βέλτιστες ποσότητες στις οποίες συμφέρει να κατασκευασθεί κάθε μοντέλο; (Ενδιάμεσες ποσότητες δεν παρασκευάζονται). Ποιες είναι τότε οι βέλτιστες αναμενόμενες χρηματικές αξίες (EMV); Να γίνουν οι δύο σχετικοί πίνακες.

1. Για την εταιρεία κατασκευής φωτογραφικών μηχανών της προηγούμενης άσκησης, θεωρήστε πως υπάρχει περιορισμός στην παραγωγή, οπότε η συνολική παραγωγή δεν πρέπει να ξεπεράσει τις 12,000 φωτογραφικές μηχανές. Κατασκευάστε το δένδρο αποφάσεων και βρείτε τη βέλτιστη ποσότητα στην οποία πρέπει να παραχθεί κάθε μοντέλο.
2. Για την εταιρεία της άσκησης 5, υποθέστε πως η συνολική παραγωγή είναι περιορισμένη στις 12,000 μηχανές το πολύ, αλλά τώρα ο κατασκευαστής πιστεύει πως οι πωλήσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ των δύο μοντέλων. Οι πιθανότητες και των δύο μοντέλων μαζί δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Ζήτηση** **Πολυτελούς μοντέλου** |  |
| **Ζήτηση****Κλασικού Μοντέλου** | 3,000 | 6,000 | **Οριακή πιθανότητα** **της Ζήτησης για το** **Κλασικό Μοντέλο** |
| 5,000 | 0.15 | 0.05 | 0.20 |
| 10,000 | 0 | 0.80 | 0.80 |
| **Οριακή πιθανότητα****της Ζήτησης για το Πολυτελές Μοντέλο** | 0.15 | 0.85 | 1.00 |

**Πίνακας 10.28**

Κατασκευάστε το δένδρο αποφάσεων για το πρόβλημα και βρείτε την βέλτιστη ενέργεια και την αναμενόμενη αξία.

1. Θεωρήστε τον παρακάτω πίνακα με υποθετικές τιμές που εφαρμόζονται για μία απόφαση:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Αξία υπό συνθήκη για την****αντίστοιχη παραγγελία** |
| **Γεγονός** | **Πιθανότητα** **για το γεγονός** | **Ενέργεια 1** | **Ενέργεια 2** | **Ενέργεια 3** |
| **ΑΒ****C** | 0.300.500.20 | 555 | 367 | 349 |

α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας των αναμενόμενων τιμών και καθορίστε τη βέλτιστη ενέργεια.

β) Να κατασκευαστεί ο πίνακας για το αναμενόμενο κόστος ευκαιρίας.

γ) Να κατασκευαστεί ο πίνακας με τα αναμενόμενα κέρδη κάτω από τέλεια πρόβλεψη.

δ) Να υπολογιστεί το αναμενόμενο κέρδος, υποθέτοντας ότι διαθέτουμε την τέλεια πρόβλεψη.

ε) Να υπολογιστεί η αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφόρησης.

1. Ο υπεύθυνος ενός πρακτορείου τύπου παρουσιάζει τις πιθανότητες εβδομαδιαίας ζήτησης ενός περιοδικού (πίνακας 10.29).

Κάθε τεύχος πωλείται 5.5€ και κοστίζει 4€ (κέρδος για το πρακτορείο 1.5€).

α) Εάν ο υπεύθυνος μπορεί να επιστρέψει τα απούλητα αντίτυπα με πλήρη επιστροφή χρημάτων, πόσα αντίτυπα πρέπει να παραγγείλει;

β) Εάν ο υπεύθυνος δεν μπορεί να επιστρέψει τα απούλητα αντίτυπα:

i) Πόσα αντίτυπα πρέπει να παραγγείλει; Δηλαδή ποιο είναι το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας υπό αβεβαιότητα;

ii) Ποιο είναι το βέλτιστο αναμενόμενο κέρδος;

iii) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος εάν έχουμε την τέλεια πληροφόρηση για τη ζήτηση;

iv) Ποια είναι η οικονομική αξία της τέλειας πληροφόρησης;

|  |  |
| --- | --- |
| **Γεγονός:** **Ζήτηση** | **Πιθανότητα του γεγονότος** |
| 100 αντίτυπα | 0.05 |
| 110 αντίτυπα | 0.20 |
| 120 αντίτυπα | 0.25 |
| 130 αντίτυπα | 0.30 |
| 140 αντίτυπα | 0.20 |
| **Σύνολο** | 1.00 |

**Πίνακας 10.29**

1. Κατασκευαστής προϊόντων για τα μαλλιά σκέφτεται να παράγει ένα καινούργιο προϊόν. Το στοιχειώδες κέρδος είναι 20 € ανά μονάδα (βάσει των σημερινών τιμών) και η απαραίτητη επένδυση σε εξοπλισμό είναι 300,000 €. Η αναμενόμενη ζήτηση δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α) Πρέπει να κατασκευαστεί το νέο προϊόν; Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος;

β) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή της βέλτιστης παραγγελίας;

γ) Ποιά η αλλαγή της βέλτιστης παραγγελίας, εάν η πιθανότητα που αντιστοιχεί στις 40,000 μονάδες ήταν 0.15 και η πιθανότητα που αντιστοιχεί στις 80,000 μονάδες ήταν 0.30;

|  |  |
| --- | --- |
| **Ζήτηση** **(σε μονάδες)** | **Πιθανότητα** |
| 40,000 | 0.05 |
| 50,000 | 0.10 |
| 60,000 | 0.15 |
| 70,000 | 0.30 |
| 80,000 | 0.40 |
| **Σύνολο** | 1.00 |

**Πίνακας 10.30**

1. Όταν ένα νέο εμπορικό κέντρο κατασκευάζεται, η ηλεκτρική εταιρεία πρέπει να εγκαταστήσει έναν μετασχηματιστή στην τοποθεσία. Εάν συμβεί αυτό πριν γίνουν οι αναθέσεις των χώρων στις εταιρίες που θα εγκατασταθούν, είναι αβέβαιη η ποσότητα ρεύματος που θα χρειαστεί (για παράδειγμα ένα super market χρειάζεται περισσότερο ρεύμα από ένα βιβλιοπωλείο) και ως εκ τούτου, είναι άγνωστο το μέγεθος του μετασχηματιστή. Ένας πολύ μικρός μετασχηματιστής θα πρέπει να αντικατασταθεί, ενώ ένας πολύ μεγάλος θα έχει ως αποτέλεσμα περισσότερα έξοδα από τα απαιτούμενα.

Το κόστος του μετασχηματιστή σε χιλιάδες € δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

|  |  |
| --- | --- |
| **Μετασχηματιστής** | **Κόστος** |
| **Μικρός** | 25 |
| **Κανονικός** | 50 |
| **Μεγάλος** | 70 |

**Πίνακας 10.31: Κόστος αγοράς σε χιλιάδες ευρώ**

Ο μικρός μετασχηματιστής επαρκεί για να καλύψει τη ζήτηση σε ηλεκτρική ενέργεια αν αυτή τελικά αποδειχτεί μικρή, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση πρέπει να αντικατασταθεί. Αντίστοιχα, ο κανονικός μετασχηματιστής επαρκεί για ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας μικρής ή μεσαίας και πρέπει να αντικατασταθεί μόνο αν η ζήτηση σε ηλεκτρική ενέργεια είναι μεγάλη. Τέλος, ο μεγάλος μετασχηματιστής επαρκεί σε κάθε περίπτωση. Όταν ένας μετασχηματιστής αντικατασταθεί, επιβαρυνόμαστε με όλο το κόστος αγοράς του νέου, ο δε παλιός μικρότερος εκποιείται στο 10% της αξίας του.

Οι πιθανότητες για την απαιτούμενη ηλεκτροδότηση του εμπορικού κέντρου δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **Ζήτηση** | **Πιθανότητα** |
| **Μικρή** | 0.30 |
| **Μεσαία** | 0.60 |
| **Μεγάλη** | 0.10 |
| **Σύνολο** | 1.00 |

**Πίνακας 10.32: Κατανομή πιθανότητας για τη ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας**

α) Κατασκευάστε τον πίνακα του απαιτούμενου χρηματικού κόστους.

β) Ποιά απόφαση πρέπει να παρθεί και γιατί;

γ) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή για τη βέλτιστη απόφαση;

(Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π., Φεβρουάριος 2012)

1. Η εταιρεία Χ.Β.Ε. (Χημικά Βορείου Ελλάδος) χρησιμοποιεί φυσικό αέριο στην παραγωγική διαδικασία. Οι γειτονικές επιχειρήσεις στη βιομηχανική περιοχή της Καβάλας έχουν εξορύξει με επιτυχία φυσικό αέριο στην περιοχή τους, και η Χ.Β.Ε. σκέφτεται να ακολουθήσει. Οι αρχικές δαπάνες για την εξόρυξη θα είναι 400,000 €. Εάν εξορύξουν τελικά αέριο, θα πρέπει να ξοδέψουν ακόμα 300,000 για την κάλυψη του κοιτάσματος και για τον απαιτούμενο εξοπλισμό. Με την τωρινή τιμή του αερίου, και αν η εξόρυξη είναι επιτυχής, θα έχουν κέρδος 1,500,000 €. Ωστόσο, εάν η τιμή του αερίου διπλασιαστεί, τα κέρδη θα φτάσουν στα 3,000,000 €. Η εταιρεία πιστεύει ότι η πιθανότητα να βρεθεί φυσικό αέριο είναι 30%. Επίσης, πιστεύει πως υπάρχει πιθανότητα 50% να διπλασιαστεί η τιμή του αερίου.

α) Κατασκευάστε το δένδρο αποφάσεων για το πρόβλημα, συμπληρώνοντας τις πιθανότητες και τις αντίστοιχες τιμές.

β) Ολοκληρώστε το δένδρο υπολογίζοντας τις αναμενόμενες τιμές. Ποια είναι η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθήσει η εταιρεία;

1. Μία εταιρεία κατασκευάζει ηλεκτρικά τρενάκια και άλλα διάφορα παιχνίδια. Η εταιρεία δίνει εγγύηση ενός χρόνου για κάθε παιχνίδι που πουλάει.

Ο υπεύθυνος πωλήσεων ανησυχεί με τον αριθμό των τρένων που έχουν επιστραφεί μέσα στο χρόνο της εγγύησης. Πιστεύει πως ο υπερβολικός αριθμός ηλεκτρικών τρένων που δεν αντέχουν ένα χρόνο, δημιουργεί πρόβλημα στο προφίλ της εταιρείας. Ελέγχοντας τα στοιχεία, βρέθηκε πως το 10% των τρένων επιστράφηκαν σε ένα χρόνο.

Ο υπεύθυνος παραγωγής δηλώνει πως το πρόβλημα σχεδόν σε κάθε περίπτωση είναι ένα ράγισμα σε έναν ζωτικής σημασίας μηχανισμό. Η εταιρεία δυσκολεύεται να βρει έναν μηχανισμό που να την ικανοποιεί απόλυτα. Υπάρχει όμως ένα ειδικό κράμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο μηχανισμό και εγγυάται σχεδόν μηδενική πιθανότητα ζημιάς.

Ο μηχανισμός από αυτό το κράμα κοστίζει 4 € ο ένας, ενώ ο μηχανισμός που ήδη χρησιμοποιείται κοστίζει 50 λεπτά. Ο υπεύθυνος παραγωγής θεωρεί πως μία αποτυχία ανά 10 τρενάκια δε δικαιολογεί την αλλαγή της γραμμής παραγωγής και την αντικατάστασή του από ένα μηχανισμό 8 φορές πιο ακριβό.

Ο υπεύθυνος παραγωγής εισήγαγε στα τρενάκια που επιστράφηκαν με εγγύηση το νέο μηχανισμό, ώστε να μην υπάρξει και δεύτερη επιστροφή. Το κόστος επισκευής ενός ηλεκτρικού τρένου που έχει επιστραφεί είναι 15 € για την εργασία και 4 € ακόμα για τον ειδικό μηχανισμό.

Ο υπεύθυνος πωλήσεων διαφωνεί με αυτή την τακτική και πιστεύει πως ο ειδικός μηχανισμός πρέπει να χρησιμοποιείται εξαρχής σε κάθε τρενάκι. Πιστεύει πως εκτός από το άμεσο κόστος επισκευής ενός χαλασμένου παιχνιδιού, υπάρχει και κόστος δυσαρέσκειας 20 € κάθε φορά που χαλάει ένα παιχνίδι.

Η απόφαση δεν είναι εύκολη, αφού η εταιρεία εκτιμά ότι οι πωλήσεις της τον επόμενο χρόνο θα είναι 1,000 ηλεκτρικά τρενάκια.

α) Ποιά απόφαση πρέπει να πάρει η εταιρεία;

β) Ποια θα είναι η αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφόρησης;